Los matemáticos de 5.°

Geometría

SANTILLANA

Geometría

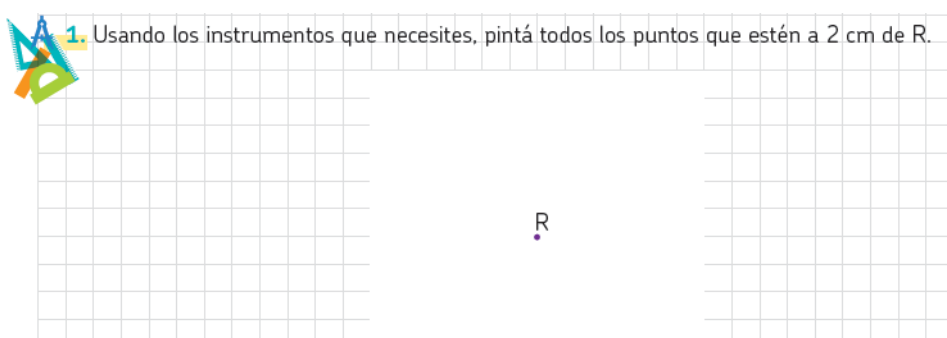
I. Aspectos centrales del tratamiento de los contenidos propuestos

En este libro, el eje de Geometría se desarrolla a lo largo de los capítulos 4; 8 y 13.

El capítulo 4, “Circunferencias y triángulos”, se inicia con un juego que permite plantear una primera aproximación a la idea de que es posible que haya más de un punto ubicado a la misma distancia de otro dado. Esta cuestión será uno de los conceptos centrales desarrollados.

Se propone en las primeras páginas un conjunto de problemas en los que deben reproducirse o construirse figuras circulares con regla y compás a partir de ciertas indicaciones. El propósito de estas actividades es que los alumnos exploren y se familiaricen con el uso del compás y recuperen –si es que ya lo han hecho– el trabajo realizado en el grado anterior. Se pone en funcionamiento aquí de manera implícita una primera idea sobre centro y radio que puede servir como punto de apoyo para definir estos conceptos.

El capítulo avanza con actividades que permiten recuperar o establecer que es posible pensar que un conjunto de puntos cumple determinada condición. En particular, se trata de establecer que, en una circunferencia, todos los puntos equidistan del centro. Por ejemplo, la página 43 se inicia con la siguiente propuesta:



Estas situaciones iniciales también se orientan hacia la posibilidad de relacionar el trazado de circunferencias con la construcción de triángulos. Es esperable que este vínculo no resulte evidente para los niños, ya que existe un salto entre pensar condiciones para la ubicación de puntos y concebir los vértices del triángulo como puntos para los cuales cuentan esas relaciones. En un caso, se trata de pensar puntos “sueltos”, mientras que en el otro, se trata de pensar los vértices como puntos en una ubicación particular dentro de la figura y los lados del triángulo como las distancias entre ellos.

En algunas de las situaciones, como la de la página 44, se inhibe el uso de la regla graduada para determinar la distancia a la que se encuentran algunos de los puntos que componen las figuras. El motivo de esta restricción es alentar a los alumnos a utilizar las relaciones que se están estudiando para analizar las figuras.

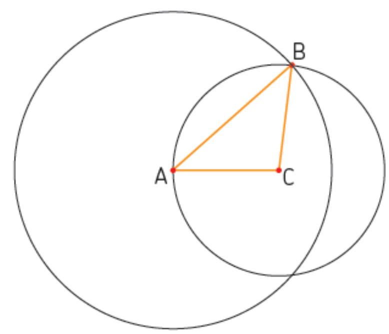
Para hacer todos juntos

En la siguiente figura...

...la circunferencia de centro A tiene 3 cm de radio.

...la circunferencia de centro C tiene 2 cm de radio.

Averigüen, sin medir con la regla, la longitud de los lados del triángulo ABC.



En las páginas 45 y 46 se proponen situaciones en las que debe investigarse la relación entre las longitudes de los lados de un triángulo. Es posible que, en las instancias iniciales, los alumnos apelen a argumentos vinculados a sus propias posibilidades de construcción, tales como “no me sale” o “no puedo construir el triángulo”. Se espera que el trabajo de análisis de las condiciones permita establecer el carácter necesario de la relación entre los lados para dar lugar así a formulaciones del tipo “no es posible que exista un triángulo si los lados tienen esas medidas” y así posibilitar cierta anticipación respecto de la experiencia de construcción.

Para hacer todos juntos

a) Uno de los lados de un triángulo mide 7 cm y otro, 4 cm. ¿Puede medir 3 cm el tercer lado? ¿Y menos de 3 cm? ¿Y más de 3 cm? Expliquen por qué.

b) ¿Existen triángulos cuyos lados tengan estas medidas?

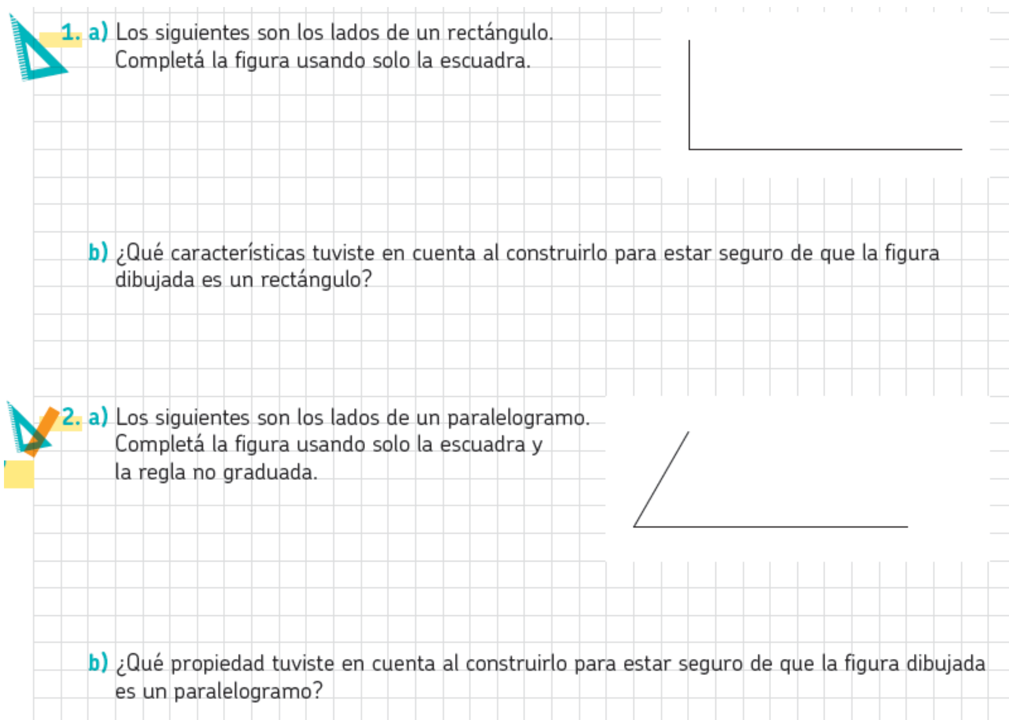
Lado 1	Lado 2	Lado 3
5 cm	5 cm	3 cm
7 cm	1 cm	3 cm
2 cm	6 cm	4 cm

En las páginas 47 a 52 se proponen problemas que profundizan el estudio de los triángulos. Ya sea a partir de determinar el valor de un ángulo dados los valores de otros, o bien a partir de contruirlos y explorar la cantidad de soluciones.

En esta parte del capítulo se presenta una explicación posible de las razones por las que la suma de los ángulos interiores de los triángulos es 180°. Se espera que los alumnos puedan comprender y comentar colectivamente y con el docente esta explicación, no solo para conocer esta propiedad, sino también como un modo de acercamiento progresivo a las formas en las que se demuestran las propiedades geométricas.

En el capítulo 8, “Cuadriláteros”, se propone una situación de juego como actividad inicial. Se trata aquí de que los alumnos avancen en sus posibilidades de identificar características geométricas de las figuras involucradas. Esta actividad puede ser retomada en las páginas 93 y 94, ya que allí se profundizan y sistematizan propiedades de los paralelogramos vinculadas a sus lados y ángulos.

En las páginas 95 y 96 se propone un conjunto de problemas vinculados a la construcción de cuadriláteros. Como en el capítulo 4, al trabajar con triángulos, las construcciones constituyen una oportunidad potente para indagar las propiedades de estas figuras, analizar la cantidad de soluciones según los datos que se tienen y también para buscar argumentos basados en las características conocidas que permitan determinar que la figura cumple con ciertas propiedades. Por ejemplo:


1\. a) Los siguientes son los lados de un rectángulo. Completá la figura usando solo la escuadra.

b) ¿Qué características tuviste en cuenta al construirlo para estar seguro de que la figura dibujada es un rectángulo?

2\. a) Los siguientes son los lados de un paralelogramo. Completá la figura usando solo la escuadra y la regla no graduada.

b) ¿Qué propiedad tuviste en cuenta al construirlo para estar seguro de que la figura dibujada es un paralelogramo?

En este libro no se busca que los alumnos aprendan un único procedimiento de construcción, ni que el procedimiento sea presentado de antemano y la actividad solo represente una oportunidad de aplicar esa secuencia de pasos. Se trata, por el contrario, de que los alumnos puedan –en algunos casos incluso con ayuda del docente– explorar y analizar los efectos de sus decisiones.

En varias de estas construcciones se indica qué instrumentos deben utilizarse. Esta restricción obedece a la intención de poner de relieve ciertas propiedades por sobre otras. Así, en términos generales, los problemas en los que están habilitadas la regla y la escuadra usualmente permiten resaltar cierta relación de paralelismo, por ejemplo, entre los lados del paralelogramo. En cambio, cuando la escuadra no puede utilizarse y está habilitado el compás, las longitudes son las que se colocan en primer plano. Retomaremos esta cuestión más adelante, en la sección III, “¿Cómo modificar la complejidad de los problemas?”

La suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros se trata en las páginas 97 y 98. En ellas se despliega un tipo de trabajo similar al realizado en el capítulo 4, al analizar los ángulos interiores de los triángulos: luego de las primeras actividades –que tienen un carácter exploratorio y que apuntan a que los alumnos puedan establecer unas primeras conjeturas vinculadas a que los ángulos interiores deben cumplir cierta condición y que la amplitud de algunos limita la medida de los otros ángulos–, se ofrece una explicación posible para ser leída colectivamente y con el docente.

Estos conocimientos aplican en la resolución de los problemas de las páginas 99 y 100, en los que debe determinarse la amplitud de uno o varios ángulos a partir de ciertas informaciones. Estos problemas permiten también señalar el estrecho vínculo entre los conocimientos sobre ángulos interiores de los triángulos y de los paralelogramos. Es decir, constituyen una buena oportunidad de vincular ambos tipos de figuras.

El capítulo concluye con un nuevo grupo de problemas sobre construcciones de cuadriláteros que retoman y avanzan sobre el trabajo realizado en las páginas 95 y 96. Consideradas en conjunto, estas y aquellas construcciones permiten estudiar tanto las propiedades de paralelismo de los lados, la medida de los ángulos interiores, como también la longitud de los lados.

Finalmente, el capítulo 13, “Cuerpos geométricos”, se inicia con una situación colectiva en la que se presenta una primera exploración guiada sobre ciertas características de los cuerpos que se ofrecen. La intención es que esta indagación permita a los alumnos avanzar en la identificación de algunas propiedades relativas a la forma y tamaño de las caras, la cantidad de aristas y vértices, como también que facilite el desarrollo de las propuestas que se despliegan a lo largo del capítulo.

El trabajo a lo largo de las páginas 153 a 156 permite estudiar prismas y pirámides a partir de las características de sus bases y sus caras laterales. Si bien es posible encontrar diversas definiciones de prismas, en este libro se considera que prismas son cuerpos cuyas bases son polígonos iguales, que están ubicados en planos paralelos y cuyas caras laterales son rectángulos. Bajo esta definición, para el cubo, las caras laterales también podrían considerarse bases, dado que son cuadrados y, por lo tanto, también son rectángulos. (Esto no ocurre en los casos en los que intervienen otros polígonos).

Tanto en el estudio de los prismas como en el de las pirámides, se trata de que la comparación y la exploración entre cuerpos permita la identificación de algunas propiedades en particular. Por ejemplo:

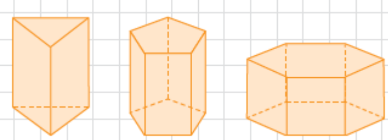
2. ¿Cuáles de estas características están presentes en estos tres prismas?

– Tienen caras que son rectángulos.

– Tienen 9 aristas.

– Tienen al menos dos caras paralelas iguales.

– Tienen 12 caras.



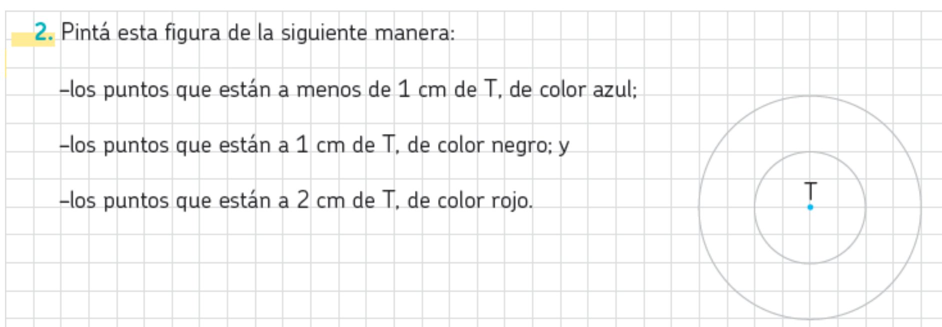
En otros casos, la indagación apunta a cierta generalización. Por ejemplo:

3. ¿Cuál es la menor cantidad de caras que puede tener una pirámide?

Las páginas 157 y 158 están dedicadas al trabajo en torno al desarrollo plano de prismas y pirámides. Las situaciones que se plantean tienen como objetivo que los alumnos puedan establecer relaciones entre las caras de los cuerpos y las figuras que forman esas caras. Luego de un problema inicial donde se hace foco exclusivamente en la cantidad de caras que se necesitan para armar un cuerpo, la propuesta se extiende hacia el análisis de las disposiciones o ubicaciones que esas caras deben tener en el desplegado para que sea posible armarlo.

II. ¿Qué se espera que los alumnos aprendan?

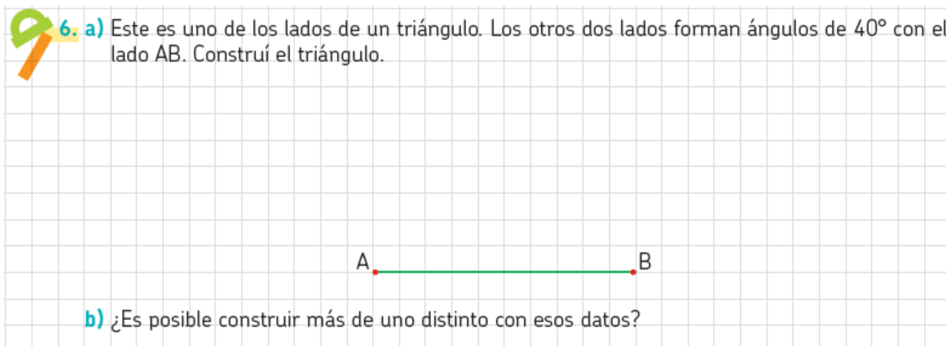
A partir de las actividades que se proponen en el capítulo 4, se espera que los alumnos puedan resolver problemas que impliquen considerar la circunferencia como el conjunto de puntos que equidistan de un centro, y el círculo como el conjunto de puntos que están a igual o menor distancia de un punto dado. Por ejemplo, en situaciones como la siguiente:

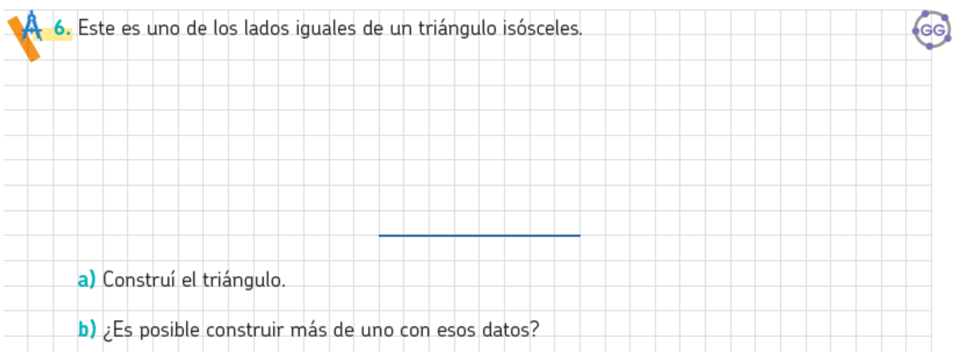


Como se señaló en la sección anterior, uno de los objetivos del trabajo geométrico que se propone en este libro es que los alumnos puedan relacionar unas figuras con otras y, por lo tanto, puedan aplicar los conocimientos ya elaborados sobre ellas a las nuevas figuras que deben estudiar. En el caso de los cuadriláteros, se trata de que los alumnos puedan identificar que sus conocimientos sobre los triángulos constituyen un buen punto de apoyo al enfrentar situaciones donde intervienen estas figuras (ya que un cuadrilátero puede pensarse como compuesto por dos triángulos). En el caso de los triángulos, que es el que nos ocupa en este capítulo, se trata de que los alumnos puedan reinvertir sus conocimientos sobre circunferencias al realizar construcciones o al decidir sobre la posibilidad de que los lados de los triángulos tengan o no ciertas longitudes.

Se espera también que los niños comprendan que la suma de los ángulos interiores de los triángulos es 180° y que esta amplitud es invariante. No se pretende que ellos produzcan una demostración sobre esta propiedad ni que recuerden la que se ofrece en este capítulo, sino que puedan interpretar la que se plantea para ser analizada colectivamente. La inclusión de este tipo de demostraciones apunta tanto a que los alumnos conozcan esta propiedad como también a que se acerquen a un modo de hacer geométrico. En este caso particular, que progresivamente tomen contacto con las formas de demostrar en geometría.

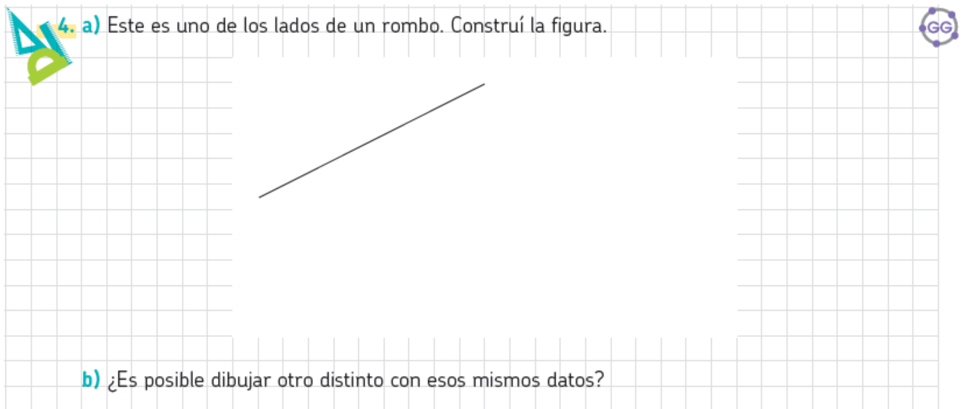
Los problemas de construcciones de triángulos tienen como propósito que los alumnos puedan considerar simultáneamente las informaciones que se ofrecen para realizar la tarea. Por ejemplo, que tengan en cuenta las longitudes de dos de sus lados y el ángulo que forman, la longitud de un lado y los ángulos que se forman con ese lado, etc., como se propone en los siguientes casos:



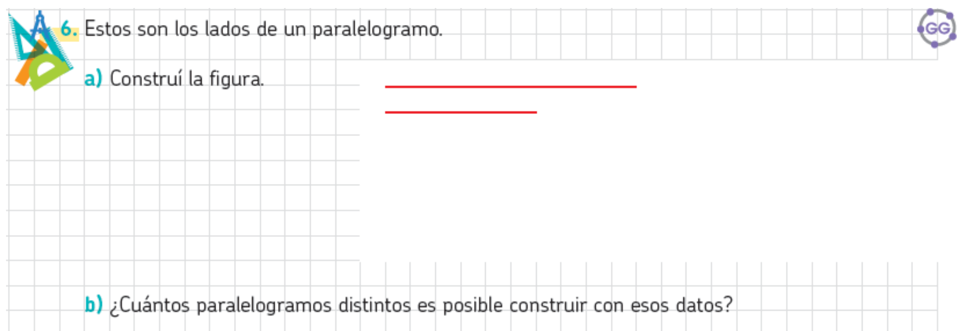


Al finalizar el capítulo, se espera que los alumnos puedan realizar este tipo de construcciones y también estudiar la cantidad de soluciones como un tipo de práctica habitual en el trabajo geométrico.

Además, al concluir el capítulo 8 se espera que los niños hayan avanzado en sus posibilidades de identificar propiedades vinculadas a los lados y ángulos de los paralelogramos. Las actividades de construcción que allí se plantean apuntan a que las propiedades sobre paralelismo y longitud de los lados puedan explorarse y que los alumnos las utilicen, por ejemplo, en las siguientes situaciones:


4. a) Este es uno de los lados de un rombo. Construí la figura.

b) ¿Es posible dibujar otro distinto con esos mismos datos?


6. Estos son los lados de un paralelogramo.

a) Construí la figura.

b) ¿Cuántos paralelogramos distintos es posible construir con esos datos?

Se pretende también que, a partir de analizar la demostración sobre la suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros, los alumnos puedan utilizar esta información para resolver problemas en los que debe hallarse la amplitud de uno o más ángulos en situaciones donde intervienen cuadriláteros y triángulos.

Finalmente, al concluir el capítulo 13 se espera que los niños puedan identificar algunas características de cuerpos geométricos vinculadas a la cantidad y formas de las caras y a la cantidad de aristas y vértices. En particular se intenta que este estudio esté centrado en los prismas y las pirámides.

El trabajo con desarrollos planos de un cuerpo –una de las cuestiones que se plantea en este capítulo– tiene como objetivo que los alumnos estén en condiciones de resolver problemas en los que puedan reconocer también que es necesaria cierta disposición particular de las figuras que lo componen para que sea posible su construcción.

III. ¿Cómo modificar la complejidad de los problemas?

A lo largo de los capítulos de geometría se podrían tomar ciertas decisiones sobre algunas características de los problemas que podrían transformarlos en situaciones más sencillas o más complejas. En esta sección haremos referencia a algunas de estas posibles variaciones, que permitirán al docente acercar el problema a los alumnos que presenten algunas dificultades para abordarlo, o bien proponer nuevos desafíos a quienes estén en condiciones de profundizar un poco más sobre algunas de las relaciones que se intentan poner en juego. También es posible considerar los criterios que acá se desarrollan para organizar el trabajo con toda la clase.

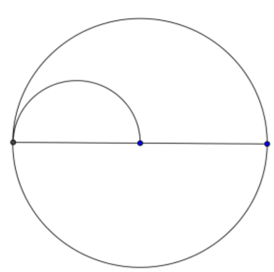
Algunos problemas de copiado pueden hacerse más sencillos si la figura en juego tiene menor cantidad de elementos. En efecto, no es lo mismo copiar una circunferencia que contiene un diámetro que, por ejemplo, dos circunferencias de radios distintos y que se intersecan en algún punto. De esta manera, el docente podrá, a partir de cualquier problema de copiado, agregar o quitar elementos que las caracterizan para aumentar o disminuir la complejidad de las relaciones involucradas en los copiados.

Por ejemplo, en esta propuesta de la página 42:

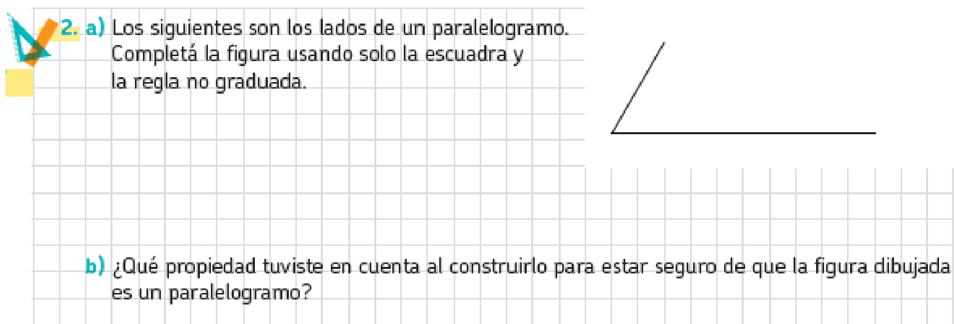
Este problema puede modificarse hacia una versión más sencilla si se presenta una sola circunferencia. Esto hace que se elimine la dificultad de alinear los centros.

Otra variable que permite maniobrar sobre el nivel de dificultad de los problemas es el tipo de hoja. Cualquier copiado sobre papel cuadriculado es más sencillo que sobre papel liso, dado que el primer tipo de hoja puede funcionar como referencia para ciertas medidas de longitud o de ángulos rectos, lo que permite hacer un poco más evidente la identificación del tipo de figuras de que se trata. Así, entonces, en el problema anterior de las circunferencias, otra manera de plantear una versión más sencilla es presentar la figura original sobre papel cuadriculado porque eso permite apoyarse en las líneas de la cuadrícula para alinear los centros de las circunferencias.

A la inversa, la tarea puede resultar más compleja si se presentan circunferencias de distintos radios y si no se indica el centro, como en este caso en que no se indica el centro de la circunferencia de radio menor.



En los capítulos 4 y 8 se proponen actividades en las que deben realizarse construcciones de triángulos y de paralelogramos, respectivamente. En esas situaciones es posible tener en cuenta qué datos se ofrecen y la manera de presentarlos como una variable del problema, ya que estas características permiten hacer más compleja o más sencilla la situación y también pueden reducir o ampliar la tarea a realizar. Por ejemplo, el problema 2 de la página 95:


2. a) Los siguientes son los lados de un paralelogramo. Completá la figura usando solo la escuadra y la regla no graduada.

b) ¿Qué propiedad tuviste en cuenta al construirlo para estar seguro de que la figura dibujada es un paralelogramo?

En este caso, una parte del paralelogramo ya aparece dibujada y, por lo tanto, uno de sus ángulos es un dato del problema. No tiene sentido entonces proponer un trabajo de exploración de cantidad de soluciones, porque en este caso hay una sola.

La situación es distinta si el problema se plantea como un enunciado donde aparecen las medidas:

Construí un paralelogramo que tenga un lado de 5 cm y otro lado de 3 cm.

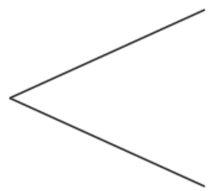
O bien como un enunciado que es acompañado por el dibujo de los segmentos que forman los lados sin el ángulo que forman, como en este caso:

Los siguientes son los lados de un paralelogramo. Realizá la construcción.

En estos dos últimos casos es interesante plantear la pregunta por la cantidad de soluciones, ya que deben ser los alumnos quienes asignen el ángulo que forman los lados consecutivos. Resulta entonces algo más complejo imaginar que es posible asignar diferentes amplitudes a ese ángulo –y que hay más de una solución posible– que solo completar el paralelogramo con dos de sus lados ya dibujados.

A su vez, una modificación en la habilitación de los instrumentos puede cambiar el problema y volverlo más complejo o más sencillo, como también promover el uso de una propiedad por sobre otras de una misma figura. Por ejemplo, el problema 1 de la página 101:

1. a) Estos son los lados de un rombo. Construí la figura utilizando regla no graduada y compás.

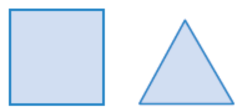


b) ¿Qué propiedades tuviste en cuenta al construirlo, para estar seguro de que la figura dibujada es un rombo?

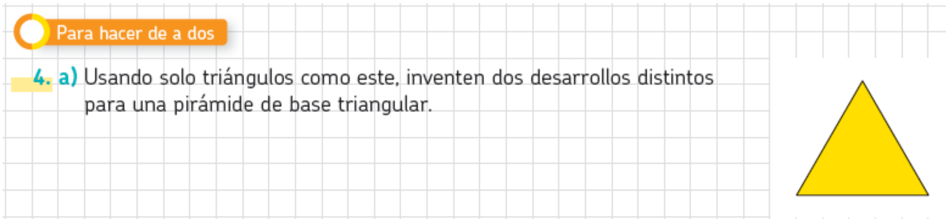
En este caso, la utilización de la regla graduada y del compás permiten poner en primer plano la longitud de los lados y analizar que todos deben ser iguales. En cambio, si los instrumentos habilitados fueran la regla no graduada y la escuadra, entonces la construcción debería realizarse teniendo en cuenta el paralelismo de los lados. A su vez, el mismo problema podría ser más complejo si los instrumentos habilitados fueran el transportador y la regla no graduada porque requeriría saber qué relaciones hay entre los ángulos consecutivos de los rombos (propiedad que los alumnos no tienen disponible por el momento y que no va a ser tratada en este libro).

En el capítulo 13 se encuentran distintas actividades referidas al desarrollo plano de cuerpos. Como señalamos, en esos casos se trata de analizar la forma y la disposición de las figuras que representan las caras. Una manera de volver más sencillos esos problemas es hacer que la indagación de los alumnos esté centrada en la cantidad y formas de las caras sin considerar la disposición en el desplegado. Por ejemplo, el problema 1 de la página 157:

1. Usando solo cuadrados y triángulos, se puede armar una pirámide de base cuadrada y un prisma de base triangular. ¿Cuántos cuadrados y cuántos triángulos se necesitan en cada caso?



En este caso solo se trata de establecer la cantidad de caras de cada tipo. En cambio, en el problema 4 de la página 158 se pide el diseño de dos desarrollos distintos. En este caso la posición de las caras en el desplegado juega un rol importante y obliga a cierta anticipación de su ubicación, además de demandar no solo una, sino dos construcciones.

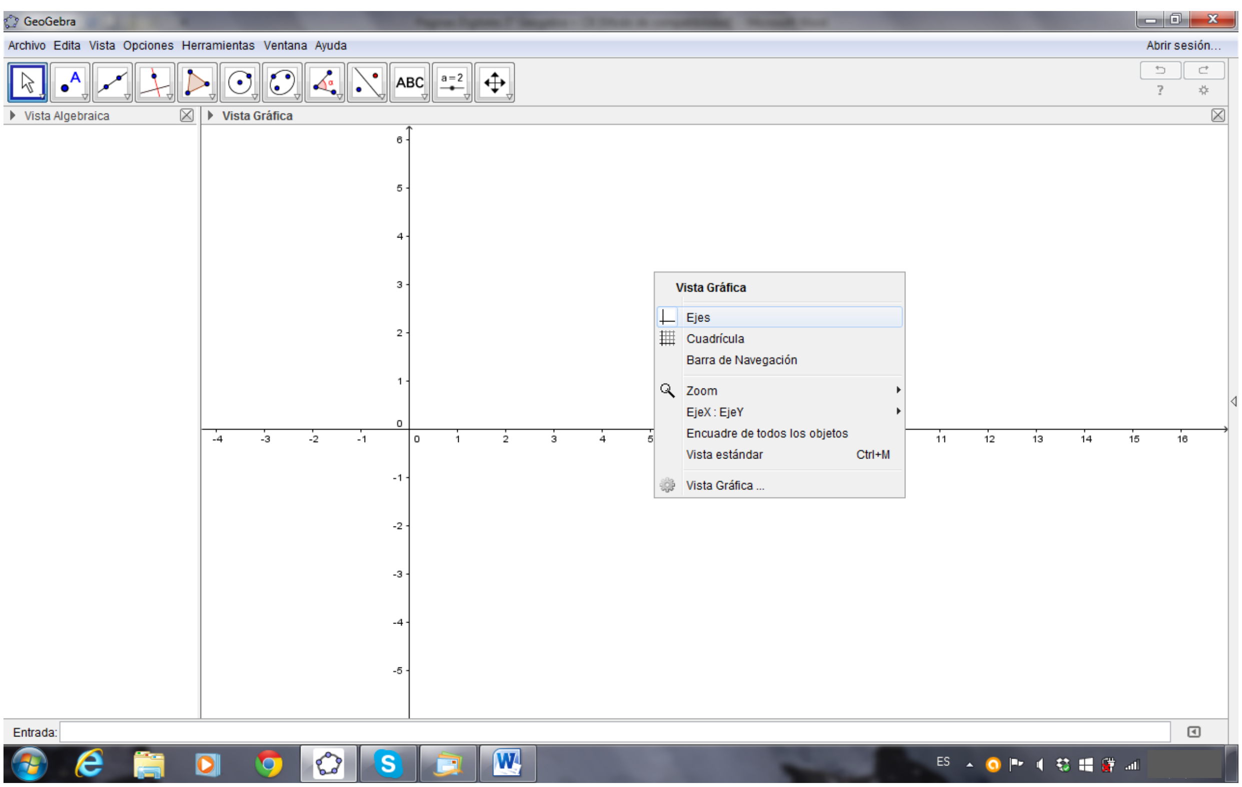

Para hacer de a dos

4. a) Usando solo triángulos como este, inventen dos desarrollos distintos para una pirámide de base triangular.

IV. Uso del programa GeoGebra

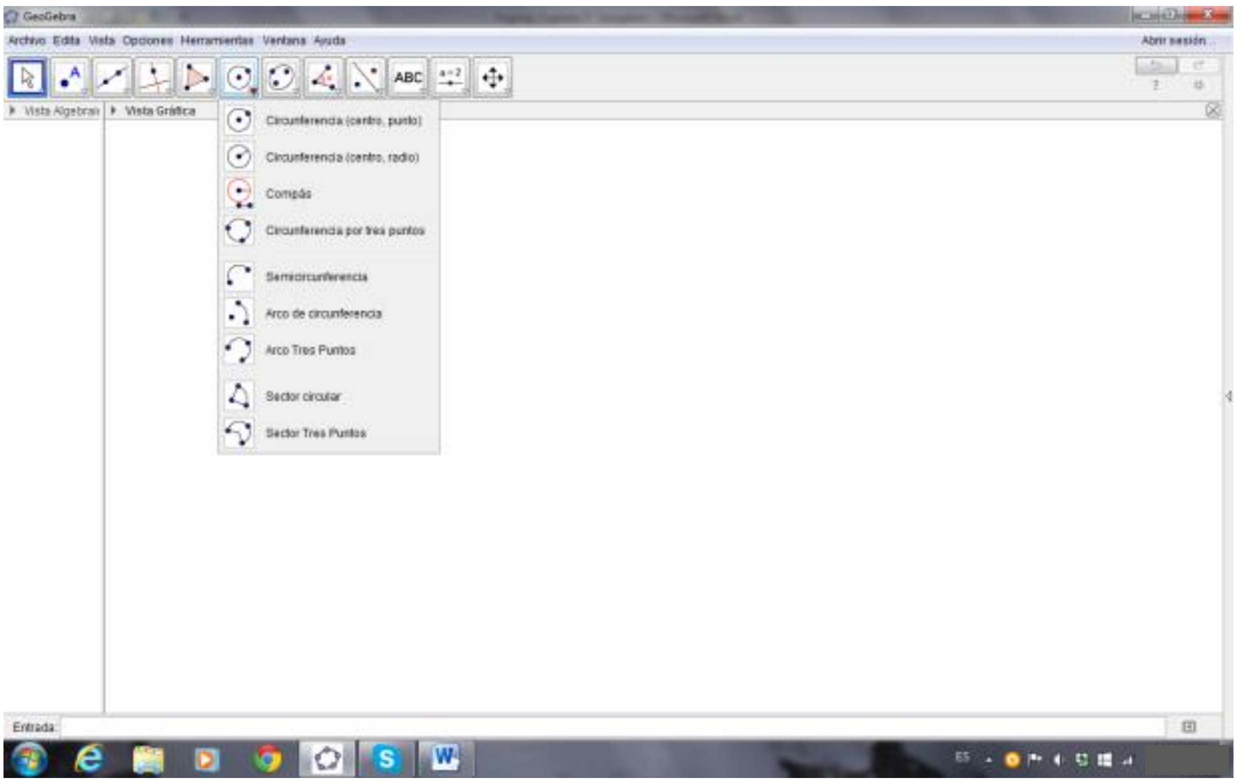
En el libro *Los matemáticos de 5.°* optamos por habilitar la resolución de algunos de los problemas recurriendo al programa GeoGebra cuando se transitan los capítulos de Geometría (capítulos 4 y 8). Estos problemas se identifican con el ícono GG. El programa se puede descargar de manera gratuita de la página *www.geogebra.org*.

Es muy probable que muchos niños aún no conozcan este *software*, por lo tanto, creemos que resultará necesario promover una primera instancia de exploración sobre algunas de sus particularidades. Una posibilidad es solicitarles a los niños que abran el programa, escondan los ejes haciendo clic sobre el botón derecho y seleccionando la opción *Ejes*[1]:



[1] Este modo de ocultar los ejes depende de la versión de GeoGebra que se utilice.

Luego se les podrá solicitar que indaguen sobre las herramientas que presenta y los dibujos que se pueden realizar. Se trata de una primera instancia de contacto con la posibilidad de trazar segmentos, rectas, circunferencias, polígonos, etc., sin abonar aún a una reflexión sobre las características específicas del programa. Para esta cuestión, se podrá proponer, en una segunda instancia, la exploración del modo de construir un objeto determinado, recurriendo a diferentes herramientas que provee el programa. Por ejemplo, circunferencias, con tres de las herramientas: *Circunferencia con centro y punto*; *Circunferencia con centro y radio* y *Compás*, que se muestran en la captura de pantalla siguiente:



Un debate a propiciar y que abona a involucrarse con las primeras características del programa, a raíz de las construcciones de circunferencias, resulta de explorar los movimientos que se le pueden impregnar a cada figura, en función de las herramientas usadas para dibujarlas. De esta manera es posible identificar la idea de centro, la noción de radio en términos de distancia entre el centro y cualquier punto de la circunferencia y un aspecto fundamental: al cambiar la longitud del radio, se modifica “el tamaño” de la circunferencia. Esta relación es clave a la hora de trabajar con el programa GeoGebra: hay objetos que se pueden mover y otros que no. Y al mover los llamados “objetos libres”, se mueve la figura construida a partir de dichos objetos, en función de las herramientas utilizadas.

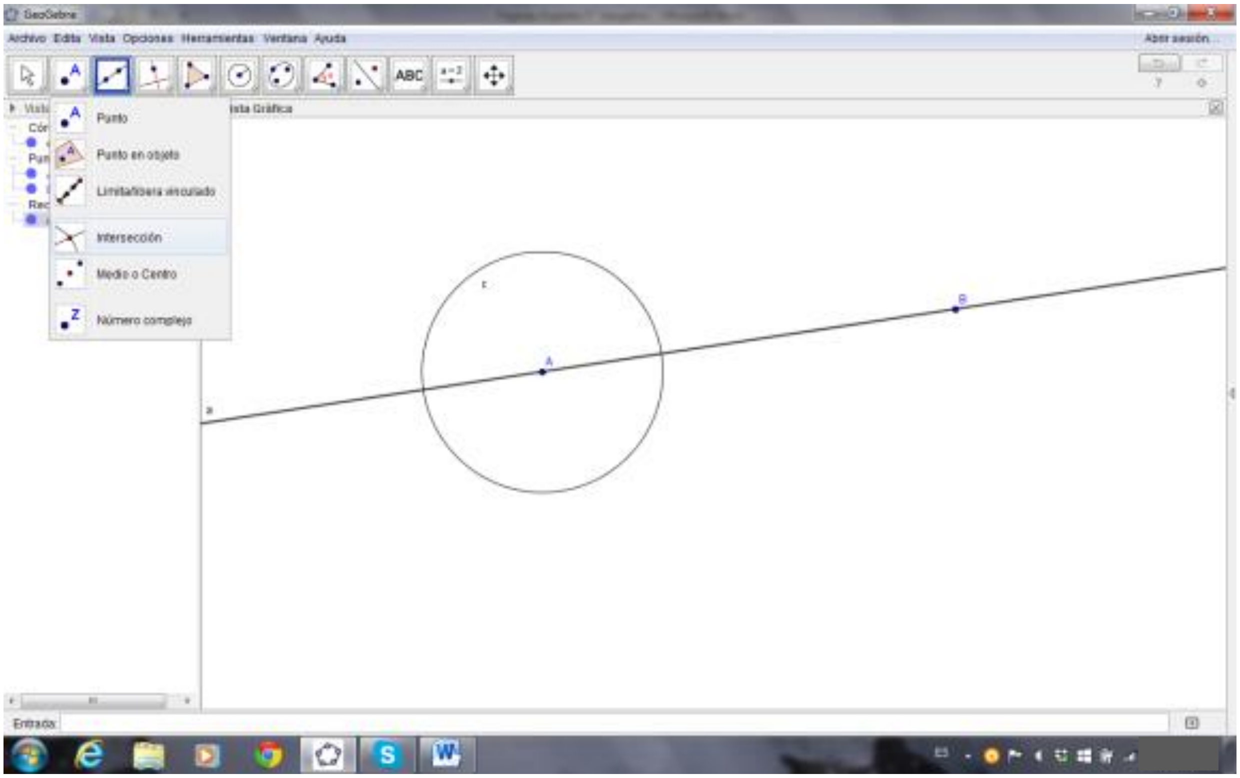
Otro asunto para explorar con los alumnos al inicio del trabajo se relaciona con la construcción de rectas paralelas y perpendiculares. En este punto también se presenta el desafío de establecer que dos rectas serán paralelas (o perpendiculares) si al mover una de ellas la otra también se mueve, preservando el paralelismo (o la perpendicularidad). Se pone de manifiesto en este punto una de las características primordiales del programa: una construcción se asumirá como correcta si al mover cualquiera de sus elementos, la figura sigue siendo lo que se quiso construir, es decir que se preservan las propiedades que la definen, y que se usaron al recurrir a las herramientas que permitieron su construcción.

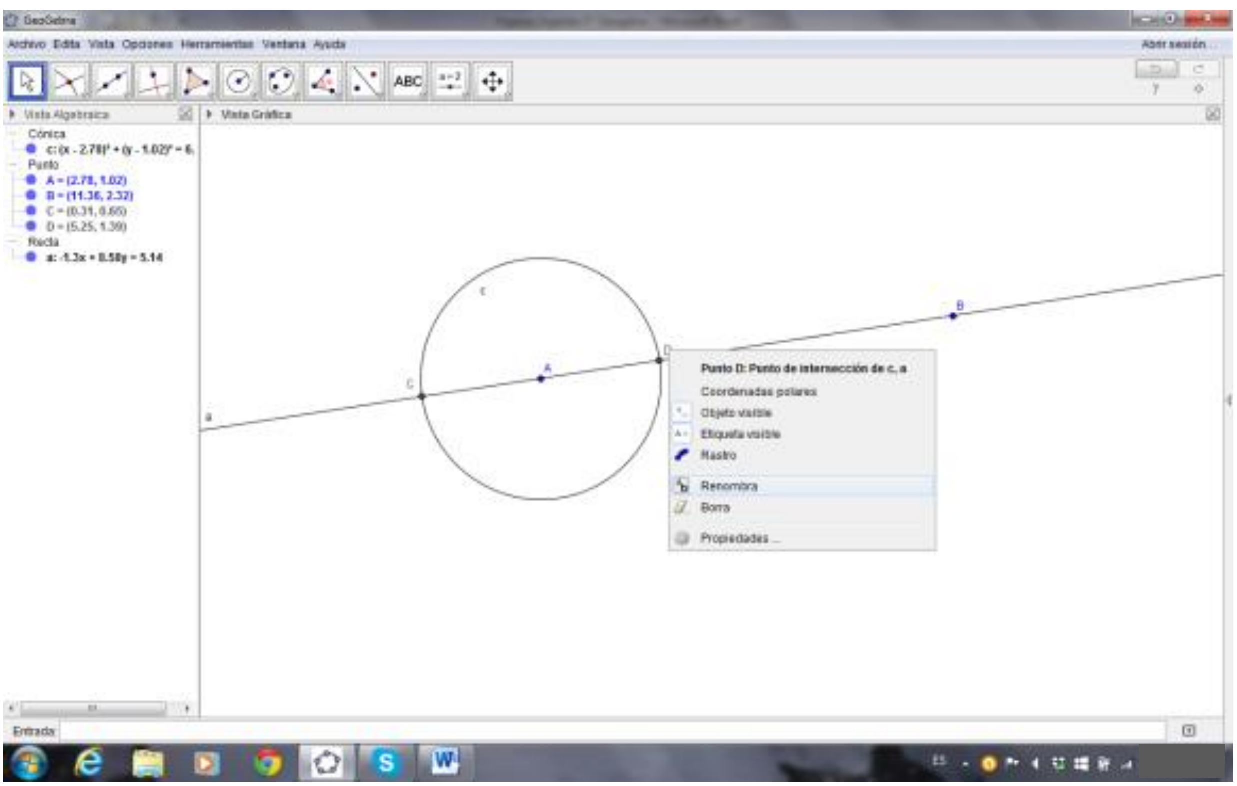
Luego de algunas instancias de trabajo como las propuestas en torno a la exploración inicial del programa, los alumnos podrán resolver los problemas que se presentan en el libro. Nos detendremos ahora en el análisis acerca del tratamiento de algunos de ellos.

El problema 2 del capítulo 4, página 42, propone lo siguiente:

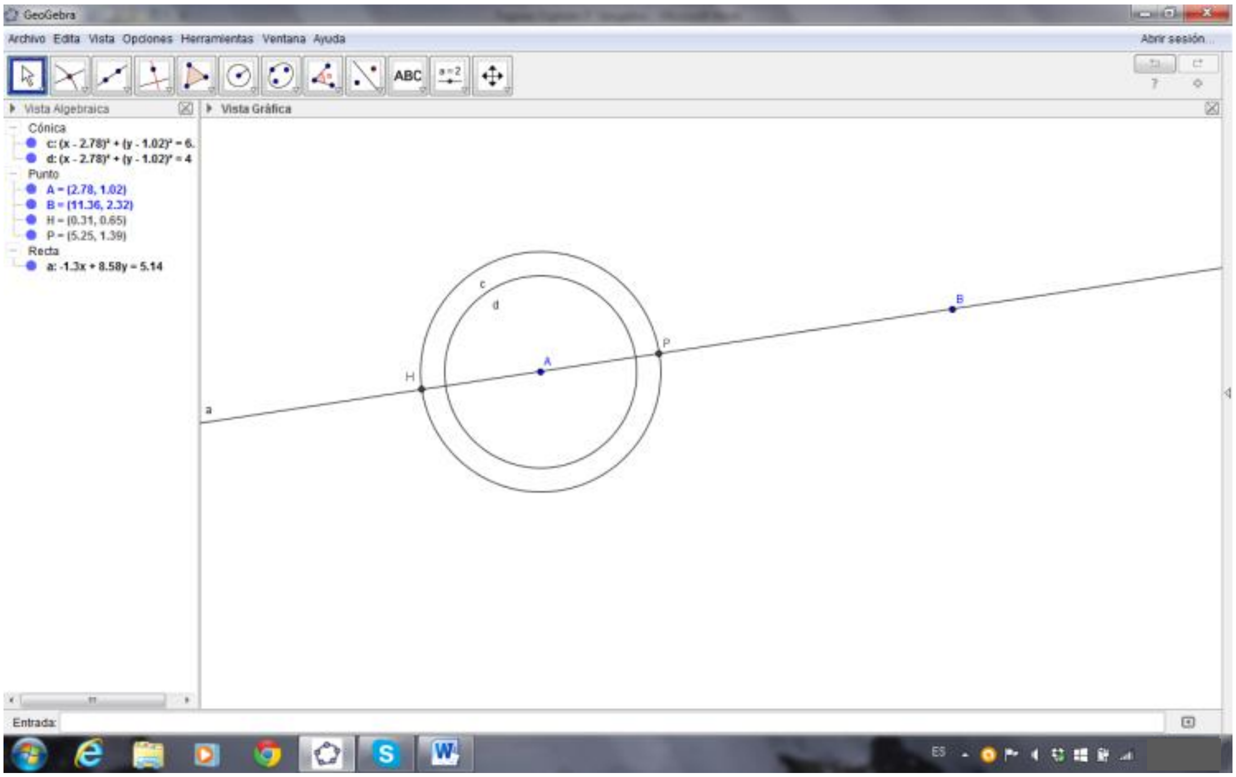
> 2. Construí una circunferencia de centro A, de 5 cm de diámetro. Trazá una recta que pase por el centro de la circunferencia. Llamá H y P a los puntos donde esa recta corta a la circunferencia. Trazá otra circunferencia que también tenga centro en A, de 2 cm de radio.

La resolución de este problema pone en juego ciertas relaciones. En principio, entre el radio y el diámetro y entre circunferencias que comparten un mismo centro pero sus radios son de diferente longitud. Pero el uso de GeoGebra obliga a considerar la idea de intersección entre recta y circunferencia para lograr el trazado de los puntos H y P que se solicita, cuestión que no es necesario explicitar si se utiliza compás y regla en una hoja de papel. Efectivamente, al trazar la circunferencia de centro A y diámetro de 5 cm, los alumnos deberán considerar que el radio será de 2,5 cm y es esperable que recurran a la herramienta *Circunferencia con centro y radio*. Luego podrán dibujar una recta que pase por el centro y, posteriormente, es probable que se interroguen sobre el modo de dibujar los puntos H y P. Seguramente el docente deberá informar el modo en que el programa realiza esta acción: se selecciona la herramienta *Intersección* para luego seleccionar la circunferencia y la recta. Es decir, el formato del programa requiere indicar la construcción que se va a realizar y en función de qué elementos. Finalmente, el mismo GeoGebra se encarga de ponerles nombres a los puntos; en nuestro caso resultan C y D. Con el botón derecho se podrá seleccionar cada punto y cambiar su denominación, procediendo como se muestra en las siguientes capturas de pantalla:


GeoGebra
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Punto
Punto en objeto
Intersección
Medio o Centro
Número complejo
Entrada:

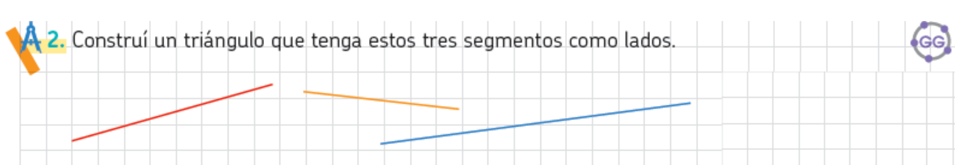

GeoGebra
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Cónica
Punto
Recta
Punto D: Punto de intersección de c, a
Coordenadas polares
Objeto visible
Etiqueta visible
Rastro
Renombra
Borra
Propiedades ...
Entrada:

La construcción de la segunda circunferencia se apoya en las mismas relaciones y herramientas ya tratadas, tal como se presenta en la siguiente captura de pantalla:



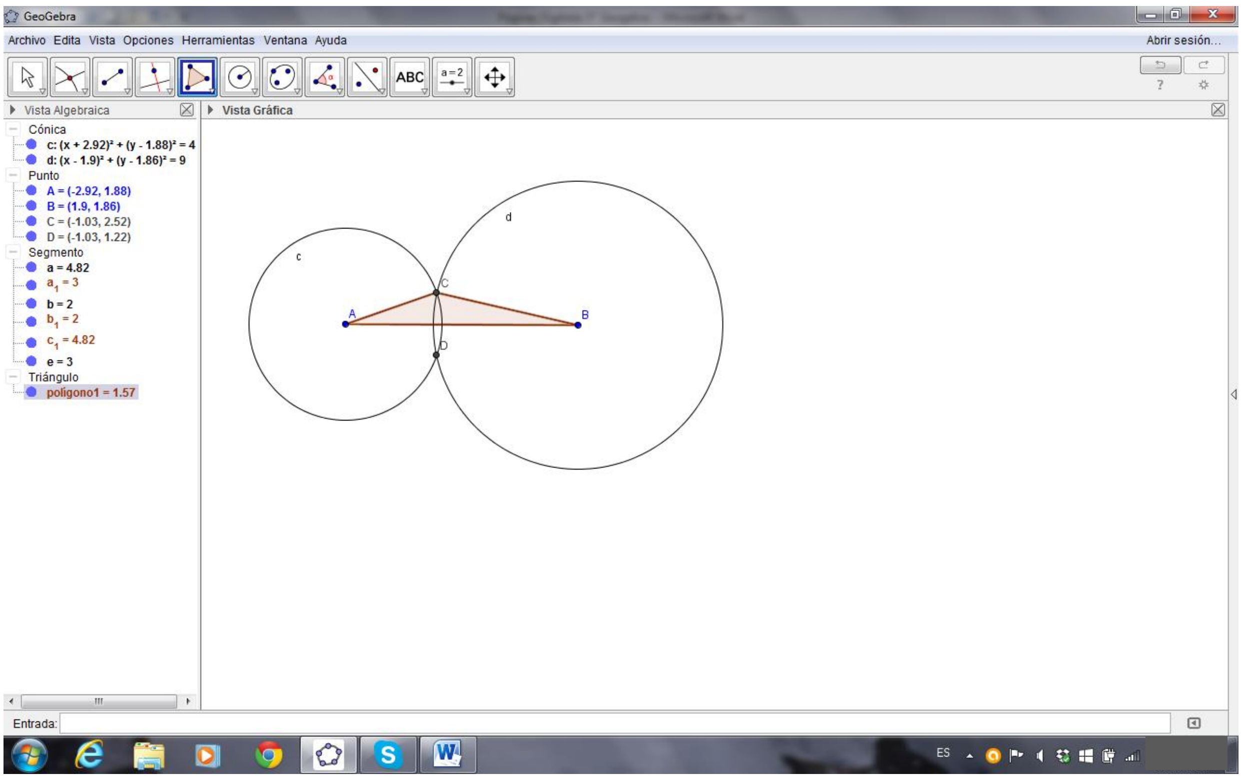
Puede ocurrir que algunos alumnos dibujen una o ambas circunferencias con otra herramienta, por ejemplo, *Circunferencia con centro y punto* o *Compás*. Será una oportunidad para sugerir que intenten mover el dibujo y analizar si cambia su "tamaño". Esta modificación seguramente será producto de que esos niños han establecido el radio "a ojo", ajustando su longitud a lo solicitado por el problema. El docente podrá promover un debate en torno a este asunto, explicitando la relación entre las condiciones de la construcción y las herramientas que se utilizan para llevarla a cabo.

Analicemos ahora el problema 2 del capítulo 4, página 45, que plantea lo siguiente:



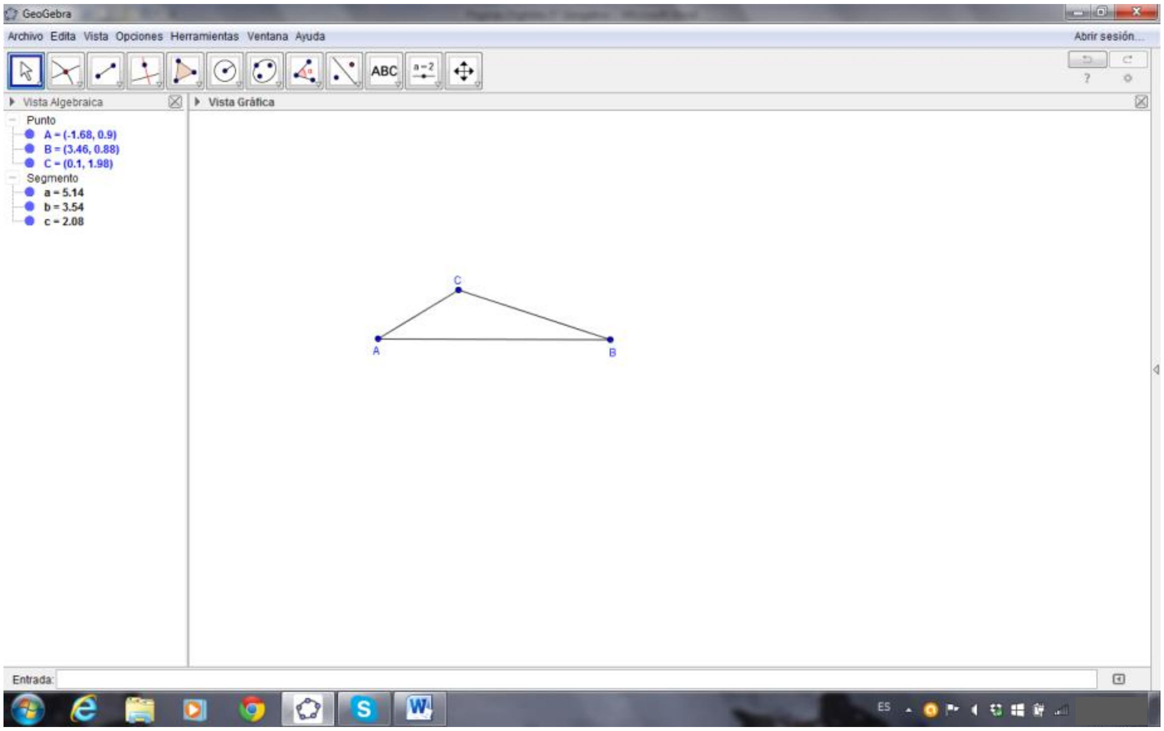
Este problema admite diferentes procedimientos de resolución cuando se intenta plasmarlo en GeoGebra. Una opción es que los niños midan cada segmento y procuren construir el triángulo apelando a esas medidas; vale la pena destacar que, aunque se dibujen los segmentos con las medidas solicitadas, las que aparecen en la pantalla no necesariamente tendrán dichas longitudes.

Se presenta, en este caso, un asunto para tener en cuenta: al dibujar uno de los segmentos como “el primer lado” (para lo cual se deberá emplear la herramienta *Segmento de longitud dada*), los otros dos deberán ser trazados recurriendo a la *Circunferencia con centro y radio*. Es decir, cada extremo del lado ya dibujado será el centro y los otros segmentos deberán ser considerados radios de las circunferencias. Y uno de los puntos de intersección será el tercer vértice del triángulo, tal como se presenta en la siguiente captura de pantalla:

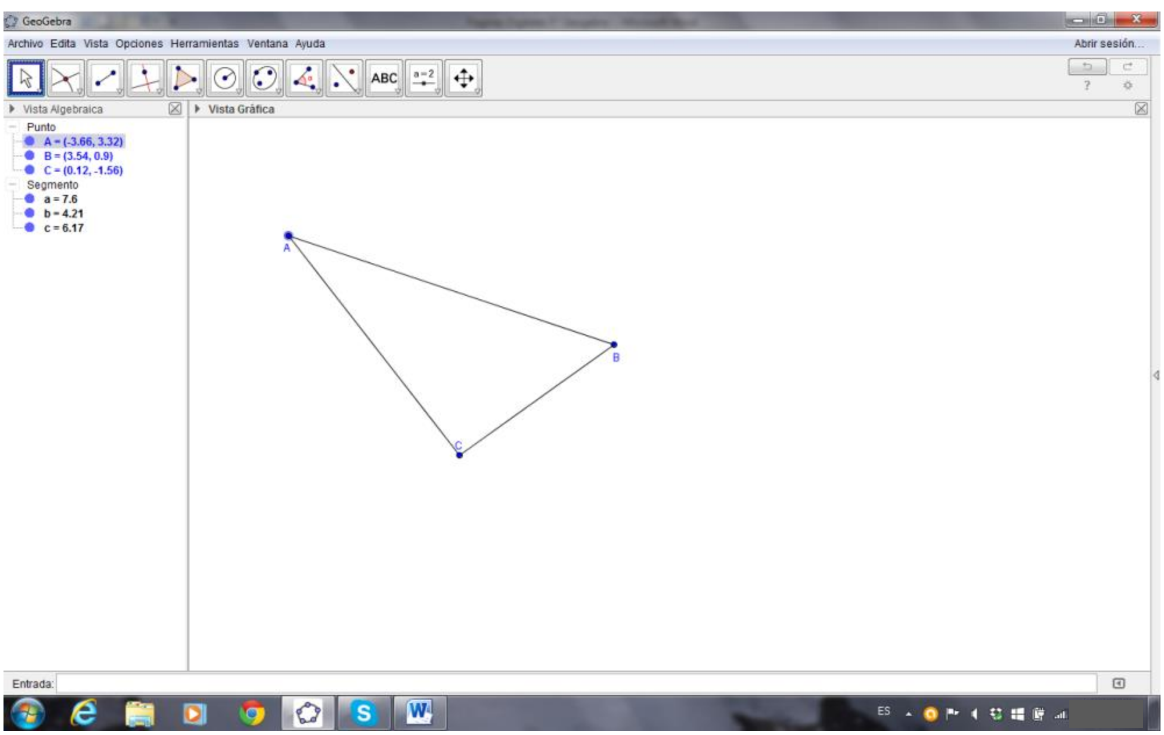


Este dibujo no admite movimientos que lo modifiquen, solo será posible desplazarlo, ya que las longitudes han sido fijadas, es decir que el triángulo sigue siendo el mismo.

Pero también es probable que algunos alumnos dibujen el triángulo, aunque considerando las medidas de sus lados “a ojo”, sin medirlos, obteniendo un dibujo similar al siguiente:

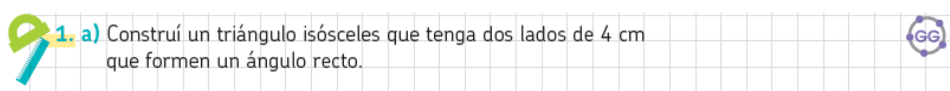


En este caso resulta sumamente interesante analizar con los alumnos la posibilidad de mover los elementos que constituyen el triángulo: vértice y/o lados:



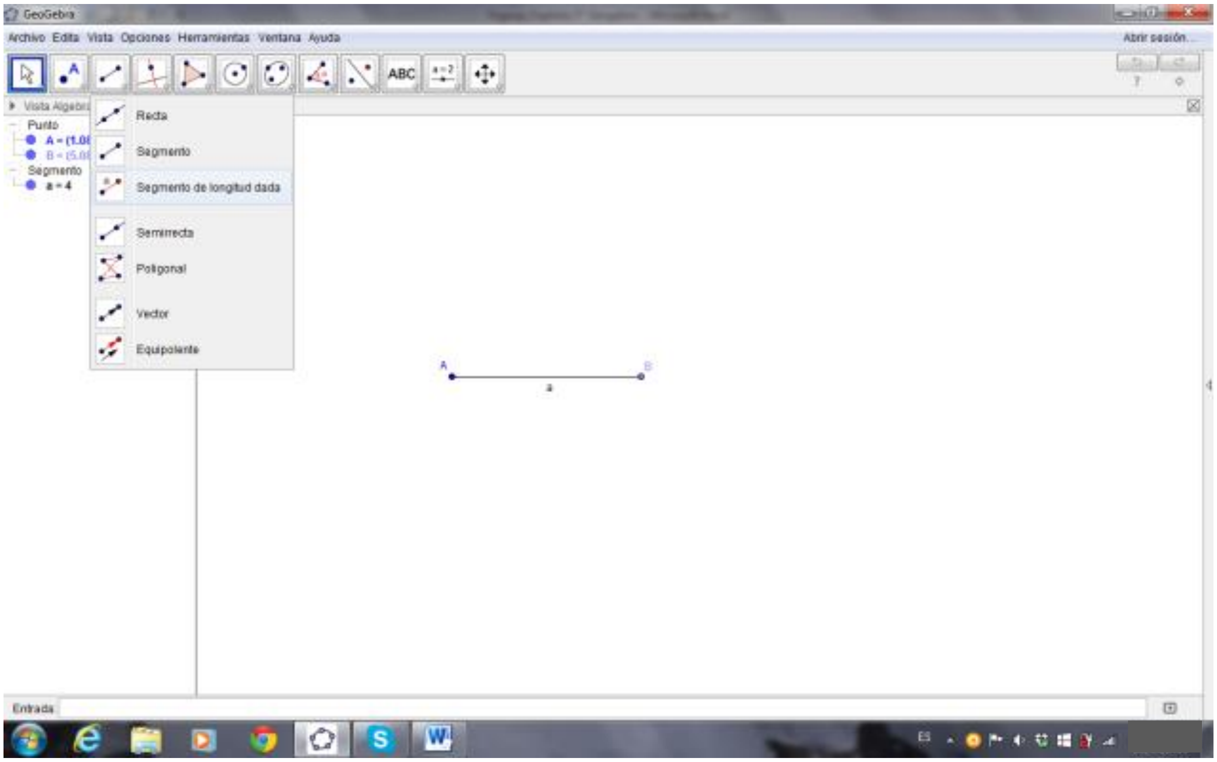
Una vez más se pone en evidencia que las herramientas utilizadas no garantizan que la construcción responda a las condiciones propuestas por el problema, pues al mover algunos de sus elementos, deja de ser el dibujo que se había solicitado, ya que las longitudes de los lados no son las que formaban parte de los datos del problema. Este fenómeno permite al docente poner en debate algunas de las relaciones que caracterizan al dibujo –en este caso, la longitud de los lados del triángulo– y las herramientas que se utilizan. Esta cuestión, en principio, no sería objeto de debate si se resolviera el problema con lápiz y papel, compás y regla. Es preciso aclarar que las relaciones entre resolver en el papel y en GeoGebra no son nada transparentes. Los instrumentos que se utilizan, el tipo de hoja al que se recurre hacen que el trabajo en lápiz y papel ponga en funcionamiento algunas relaciones diferentes a las que se movilizan al usar GeoGebra, aunque se trate del mismo tipo de construcción.

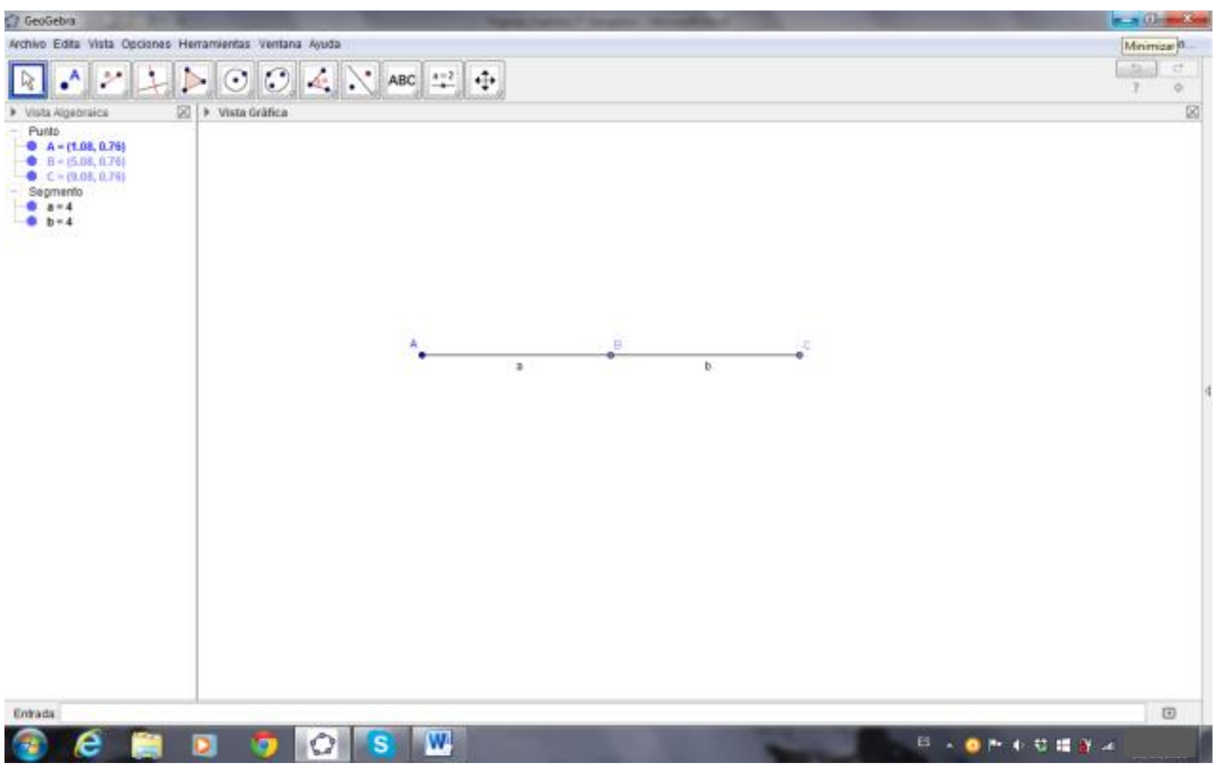
Veamos ahora algunos asuntos que habilita el trabajo con el problema 1 parte a) del Capítulo 4, página 49, cuyo enunciado es el siguiente:


1. a) Construí un triángulo isósceles que tenga dos lados de 4 cm que formen un ángulo recto.

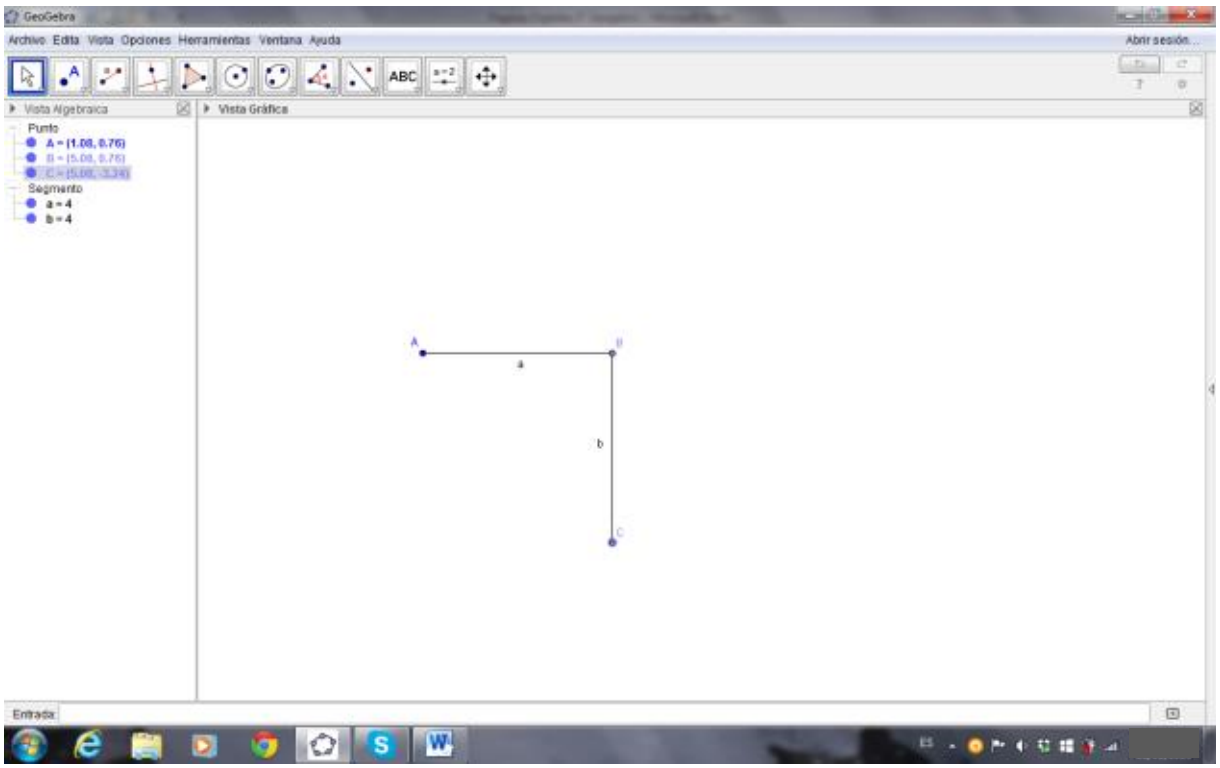
En este problema, la longitud de los lados es uno de los datos a considerar. Por lo tanto, según las herramientas que se utilicen, los procedimientos de construcción podrán ser diferentes y también las propiedades que se consideren.

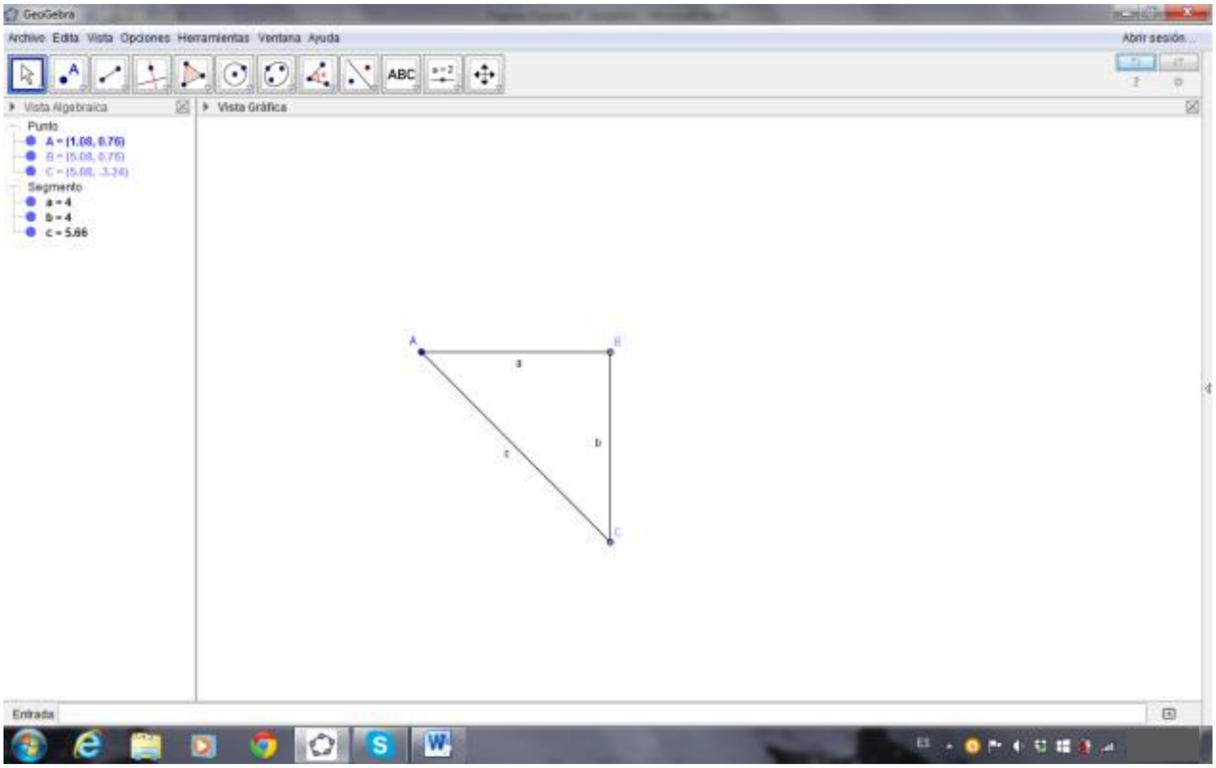
Un camino posible que los alumnos podrían desplegar para obtener el triángulo es considerar los dos segmentos de 4 cm, que serán los lados iguales del triángulo, usando la herramienta *Segmento de longitud dada*, tal como se muestra en las siguientes capturas de pantalla:


GeoGebra
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
Recta
Segmento
Segmento de longitud dada
Semirrecta
Poligonal
Vector
Equipolente
Punto
Segmento
a = 4
A
B
a
Entrada

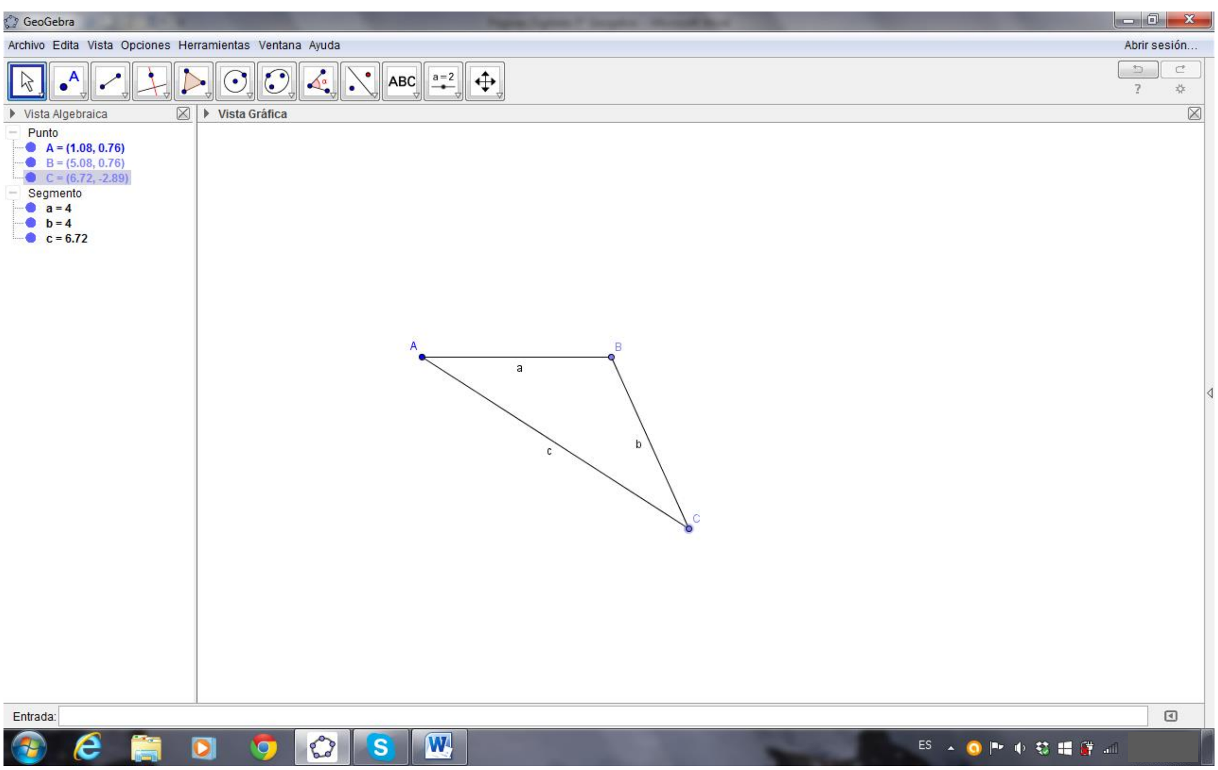

GeoGebra
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Minimizar
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Punto
A = (1.08, 0.76)
B = (5.08, 0.76)
C = (9.08, 0.76)
Segmento
a = 4
b = 4
A
B
C
a
b
Entrada

Al intentar construir el segundo segmento que tiene uno de sus vértices en el extremo del primero, el programa lo ubica de manera horizontal. Algunos alumnos podrán moverlo y lograr la perpendicularidad entre ambos lados, como se aprecia a continuación:

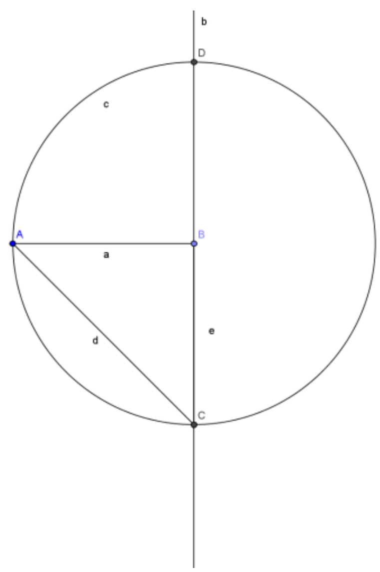




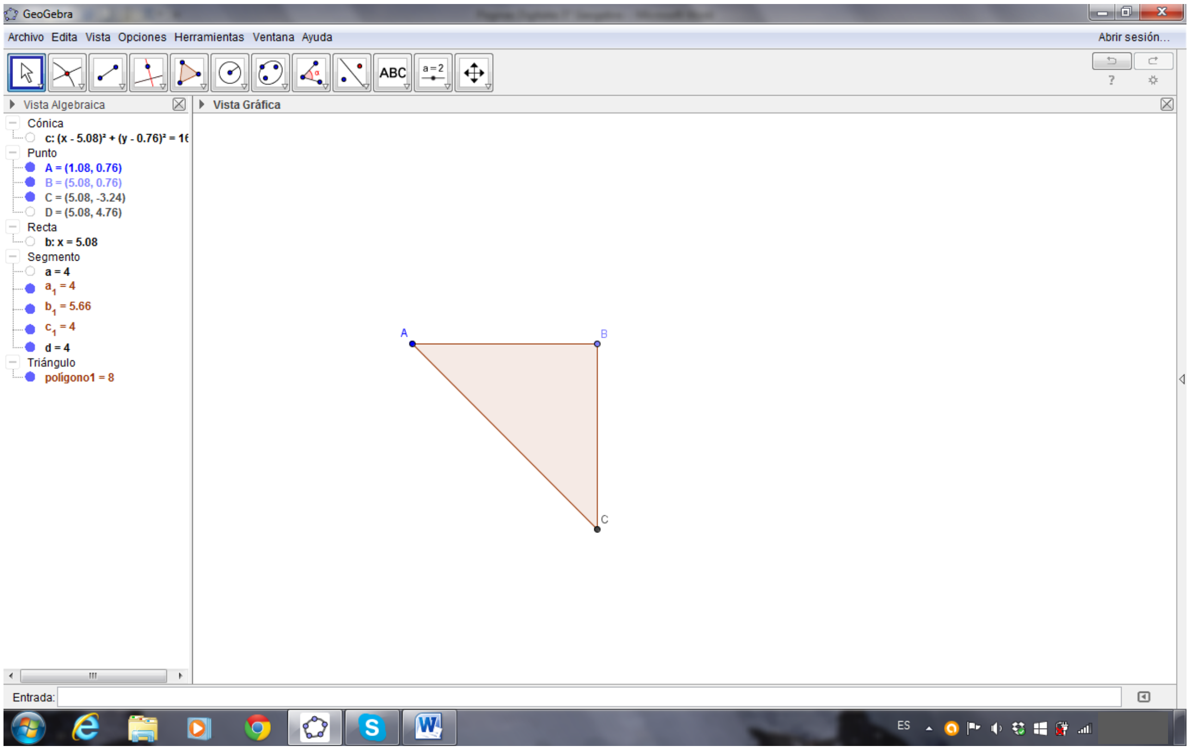
Al ojo del observador, este triángulo cumple con las condiciones propuestas por el problema. Pero al mover alguno de los lados, el triángulo deja de ser rectángulo:



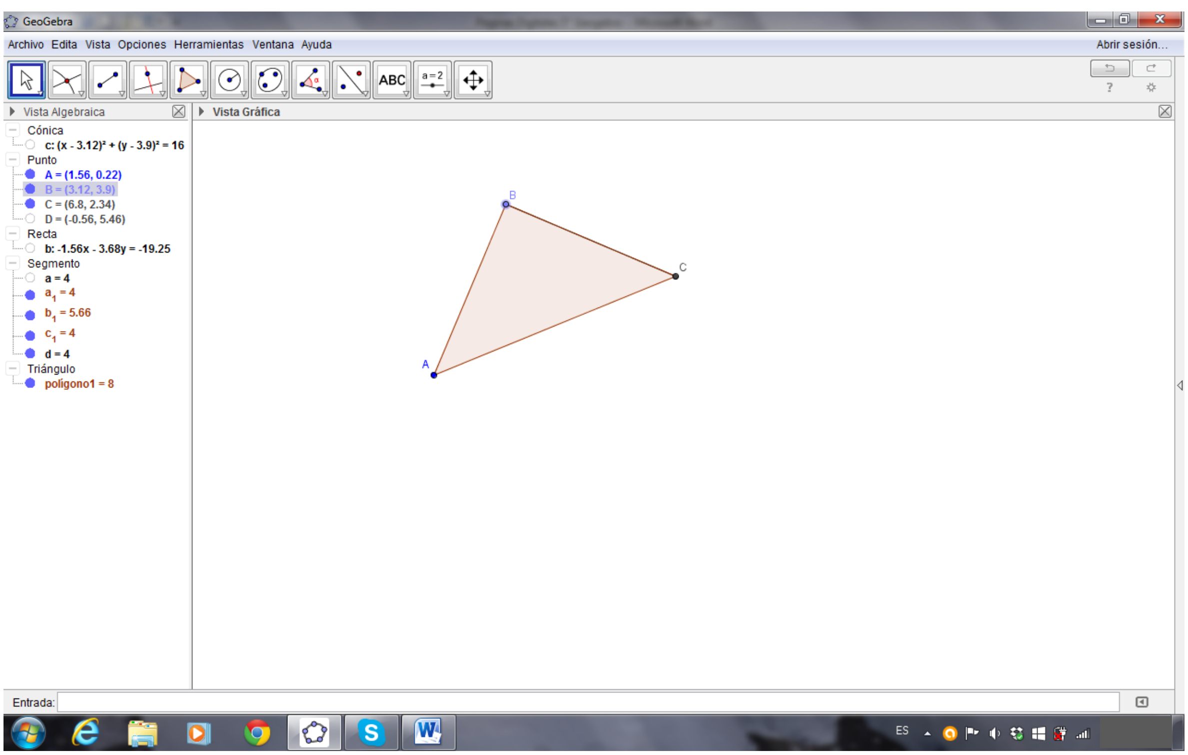
La posibilidad de mover la construcción es un recurso fértil para analizar con los alumnos qué características se preservan y cuáles se modifican, como ya ha sido mencionado. Al no considerar de entrada la relación entre los lados, el movimiento que se le puede impregnar al dibujo pone en evidencia la ausencia de alguna relación que debería formar parte del proceso de construcción, en este caso, la perpendicularidad entre los lados iguales. Se hace necesario considerar, en el mismo proceso de construcción, las relaciones entre las propiedades que se deben verificar y las herramientas que se requiere utilizar para que dichas propiedades se preserven. En nuestro caso, al trazar un segmento de 4 cm, se requerirá el trazado de una perpendicular por uno de los extremos, y sobre esa perpendicular, trazar el segundo lado de 4 cm. Para lograrlo convendrá recurrir a la *Circunferencia con centro y radio*, obteniendo un dibujo como el siguiente:



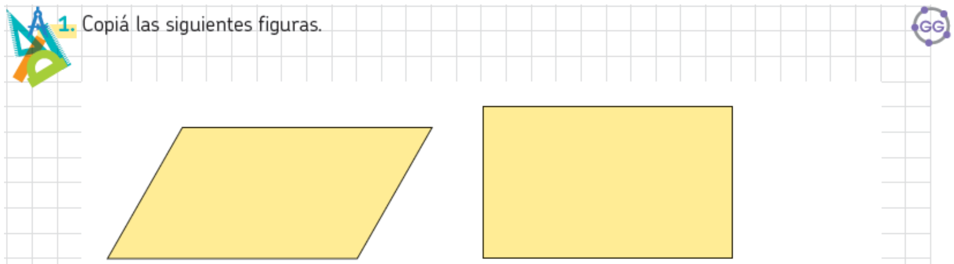
Se podrá seleccionar con el botón derecho la circunferencia para ocultarla, así como la recta perpendicular, de manera tal que quede en la pantalla solo el triángulo solicitado, como se muestra en la siguiente captura de pantalla:



Ahora sí, al mover cualquiera de los elementos que conforman el dibujo, se preservan las relaciones que se solicitaban en el enunciado del problema:

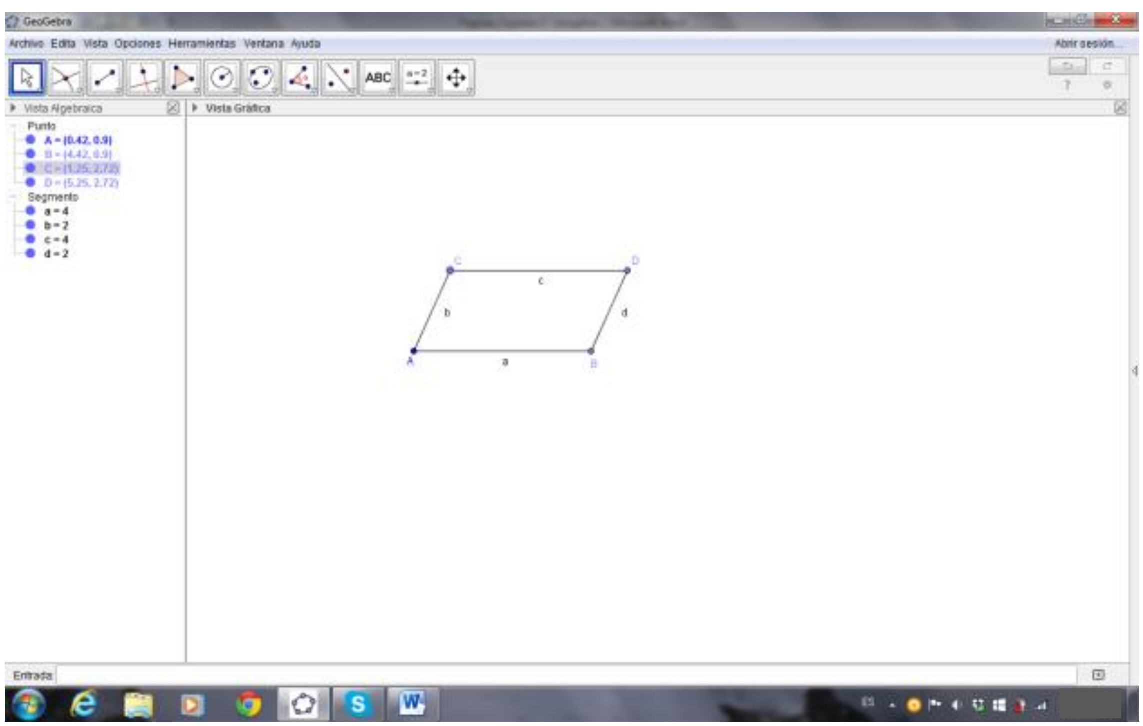


Pasemos ahora a analizar el problema 1 del Capítulo 8, página 92, que plantea lo siguiente:

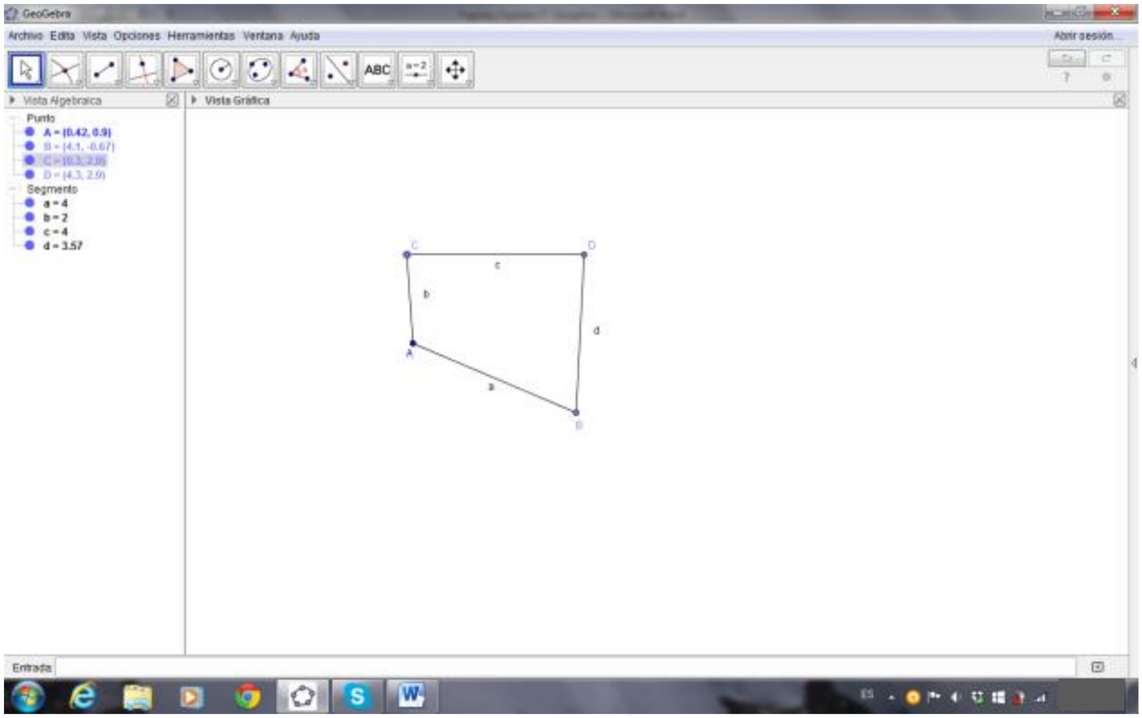


En este caso, se trata de un copiado –consideraremos la figura de la izquierda–. En consecuencia, los alumnos deberán obtener cierta información a partir del dibujo y luego tenerla en cuenta para la selección de las herramientas que usarán en el programa GeoGebra.

Es probable que algunos niños solo midan la longitud de los lados y dibujen "a ojo" el ángulo entre ellos. A su vez, puede ocurrir que no apelen a la herramienta *Paralelas* y tracen los lados también "a ojo". Una vez más, al mover alguno de los elementos, la figura se modifica, dejando de ser igual a la original, como se puede apreciar en las siguientes capturas de pantalla[2]:

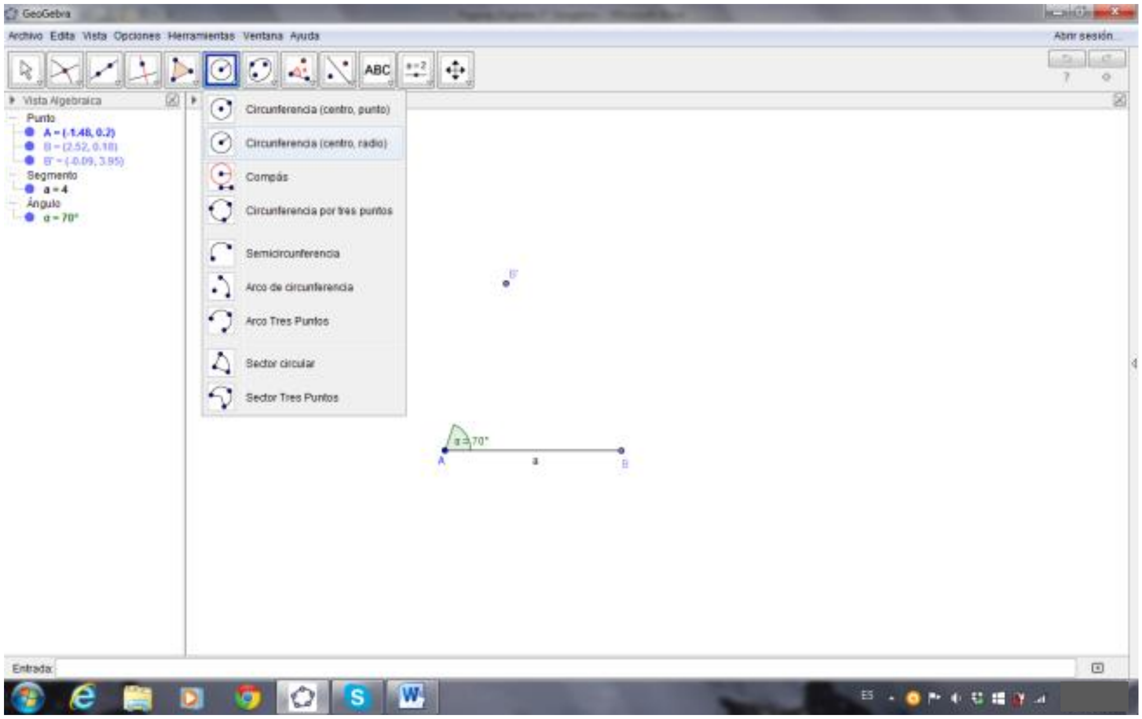


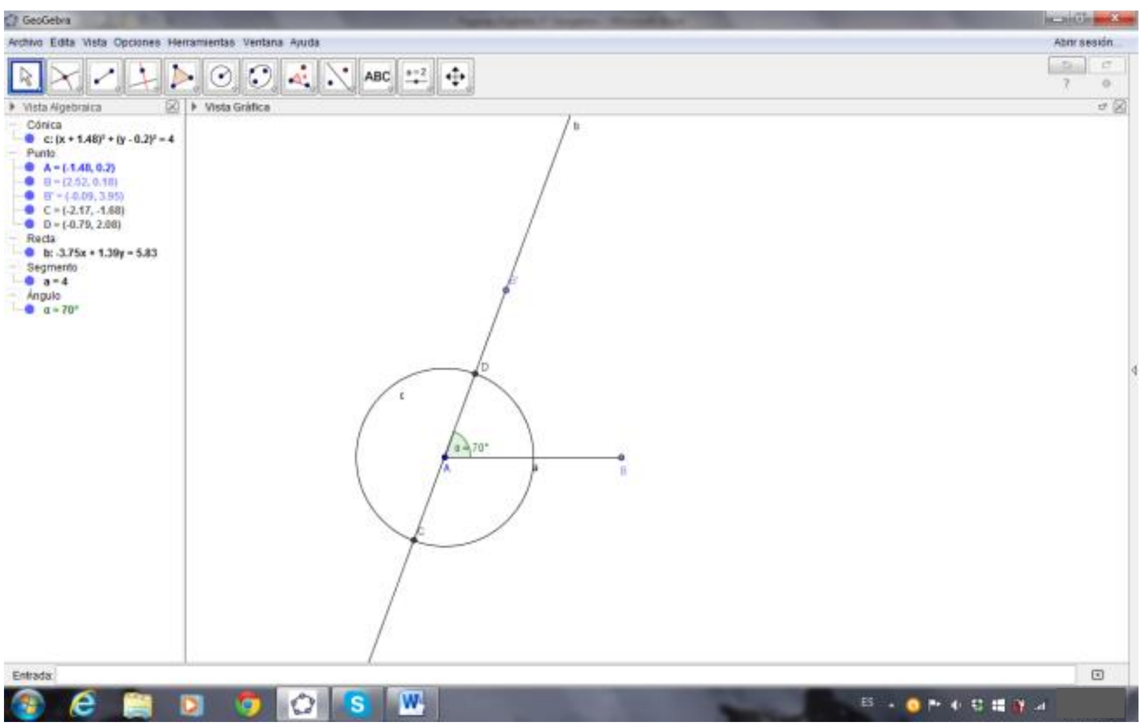
[2] En el dibujo que se presenta con GeoGebra, las longitudes de los lados no responden a las originales, ya que se trata de imagen reducida.



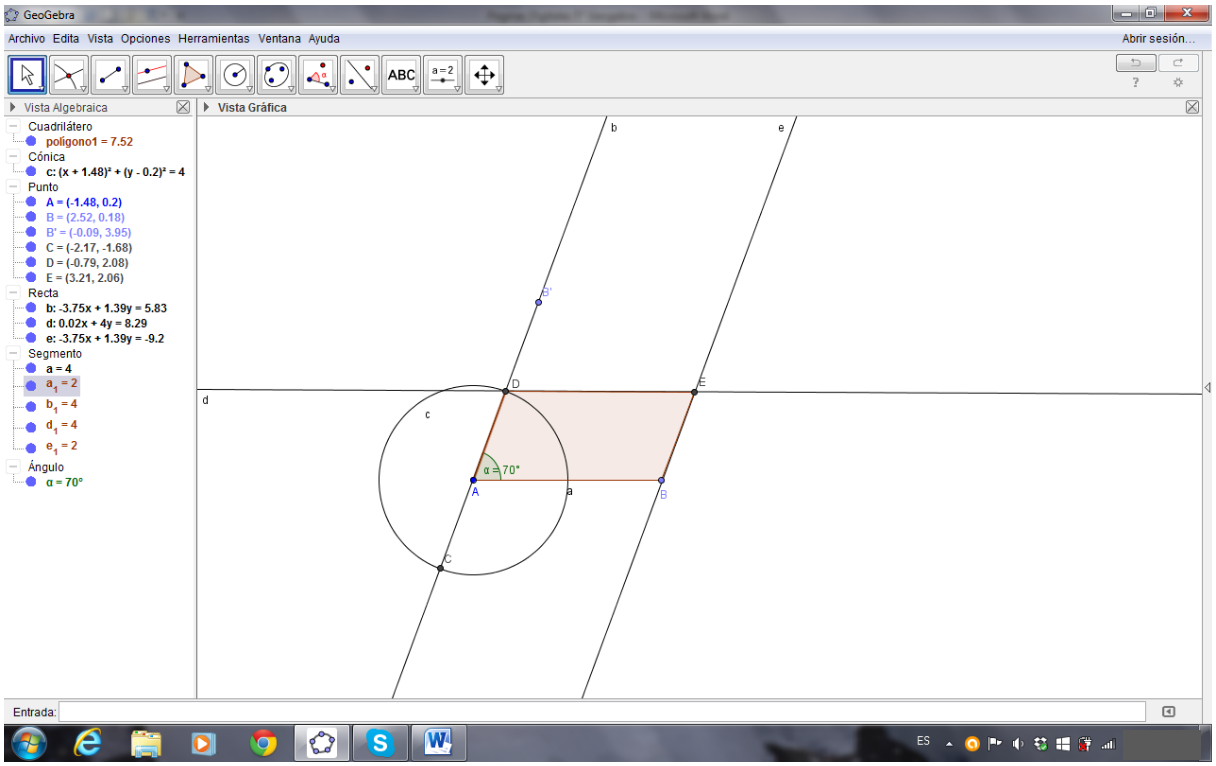
El docente con los alumnos podrán analizar los motivos por los cuáles el dibujo “se deforma” y será una buena oportunidad para poner en evidencia la necesidad de considerar el ángulo entre los lados consecutivos y el paralelismo entre lados opuestos, características propias de los paralelogramos.

Para trazar el ángulo se podrá emplear la herramienta *Ángulo dada su amplitud* y se deberán seleccionar los vértices (de derecha a izquierda) del segmento ya trazado e indicarle al programa, en el cuadro de diálogo, la medida del ángulo usando solo números. Posteriormente se deberá trazar una recta que configure el ángulo y, sobre ella, trazar el segundo lado. Será necesario entonces recurrir a la *Circunferencia con centro y radio* (el radio será la longitud del segundo lado), como se presenta a continuación:


GeoGebra
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
ABC
Vista Algebraica
Punto
A = (-1.48, 0.2)
B = (2.52, 0.18)
B' = (-0.09, 3.95)
Segmento
a = 4
Ángulo
α = 70°
Circunferencia (centro, punto)
Circunferencia (centro, radio)
Compás
Circunferencia por tres puntos
Semicircunferencia
Arco de circunferencia
Arco Tres Puntos
Sector circular
Sector Tres Puntos
B'
α = 70°
A
a
B
Entrada:


GeoGebra
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
ABC
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Cónica
c: (x + 1.48)² + (y - 0.2)² = 4
Punto
A = (-1.48, 0.2)
B = (2.52, 0.18)
B' = (-0.09, 3.95)
C = (-2.17, -1.68)
D = (-0.79, 2.08)
Recta
b: -3.75x + 1.39y = 5.83
Segmento
a = 4
Ángulo
α = 70°
b
B'
D
c
α = 70°
A
a
B
C
Entrada:

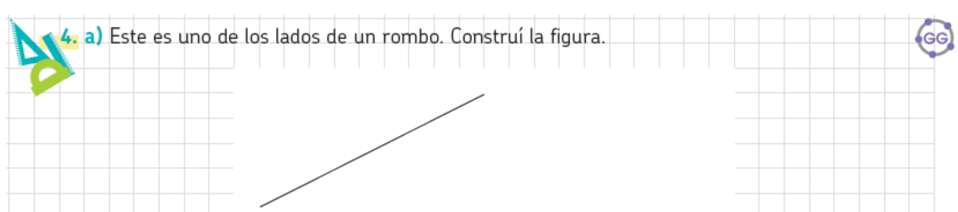
Con estos elementos ya trazados, la herramienta *Paralela* permitirá terminar la construcción, como se muestra en la siguiente captura de pantalla:



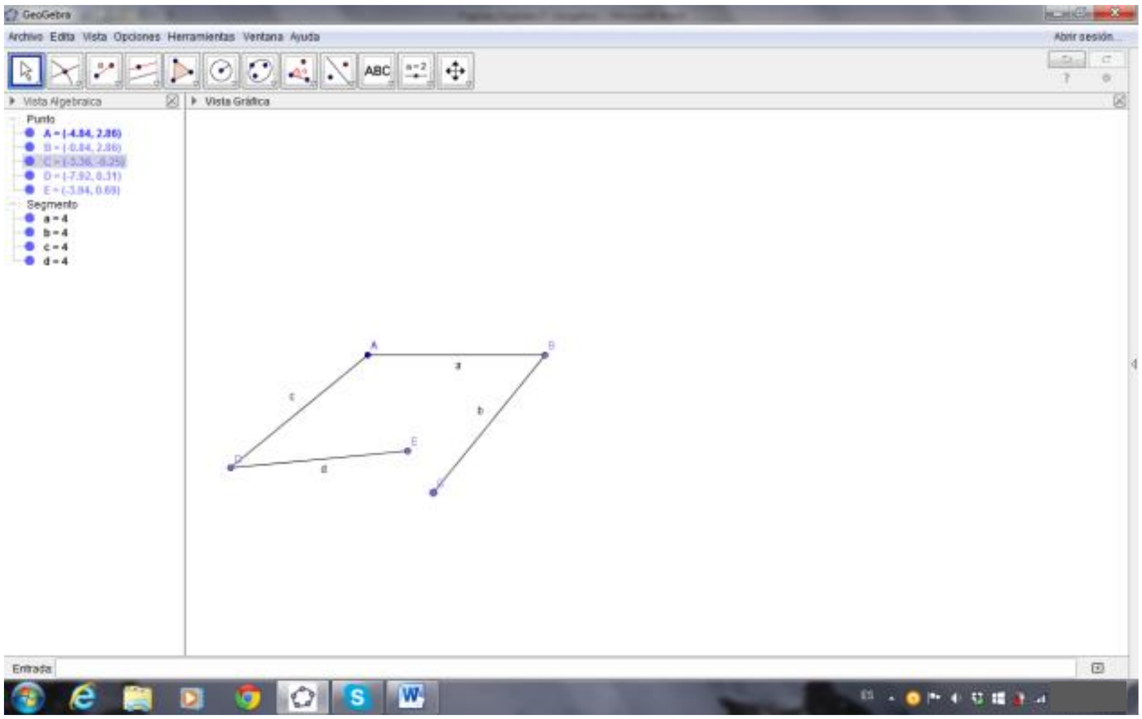
Al haber fijado la longitud de los lados y el valor del ángulo, este dibujo no admite ser modificado, solo se podrá desplazar o rotar, movimientos en los cuales sus propiedades se preservan.

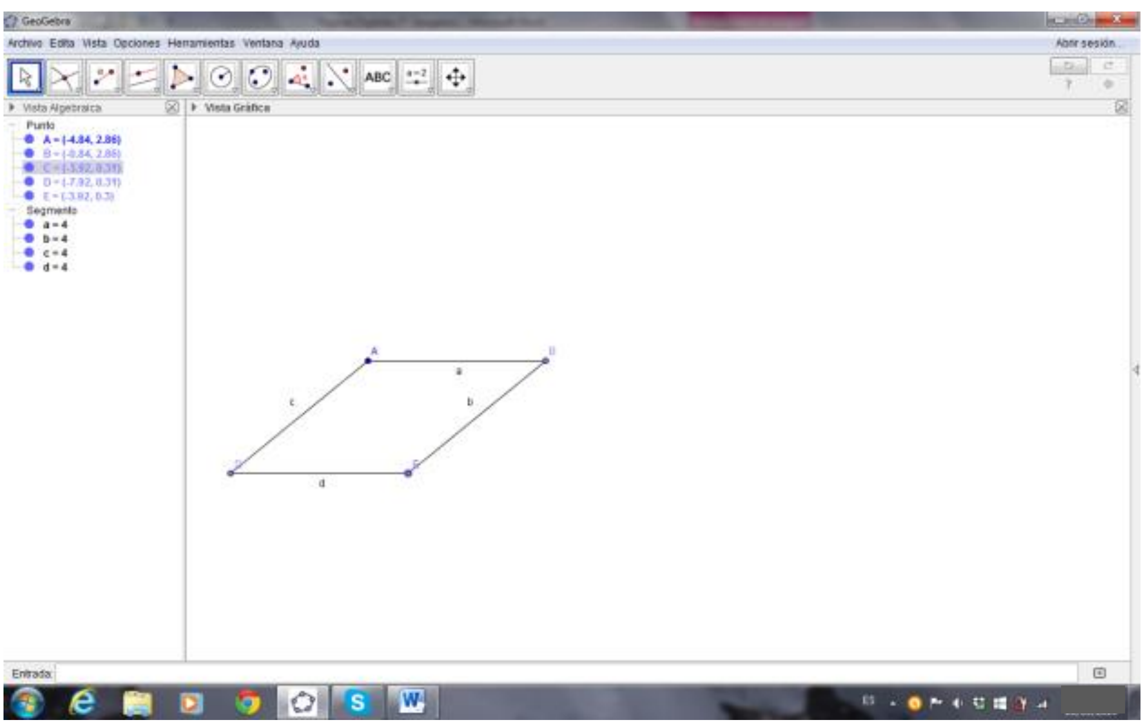
El docente, junto con sus alumnos, podrán comparar esta construcción con la se propone en el problema 5 b) de la página 96, donde se trata de construir dos paralelogramos distintos a partir de sus lados. Al no dar como condición el ángulo que forman esos lados, dicha amplitud podrá variar y será interesante analizar con los niños este asunto.

Pasemos ahora a considerar el problema 4 parte a) de la página 96:



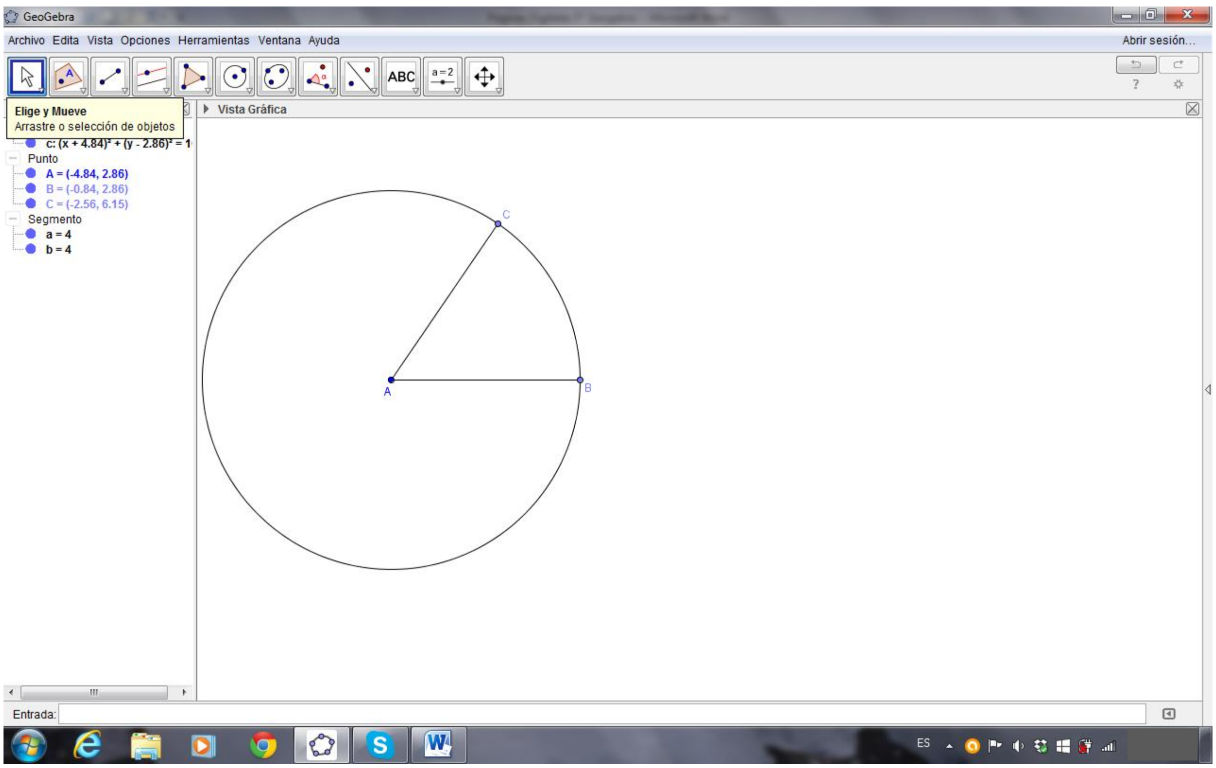
Este problema también puede ser tratado de diferentes maneras por los alumnos. Una opción es que consideren las longitudes de los lados apelando a la herramienta *Segmento de longitud dada* y dibujen todos los lados, ajustando luego su ubicación para que "cierre" el rombo:



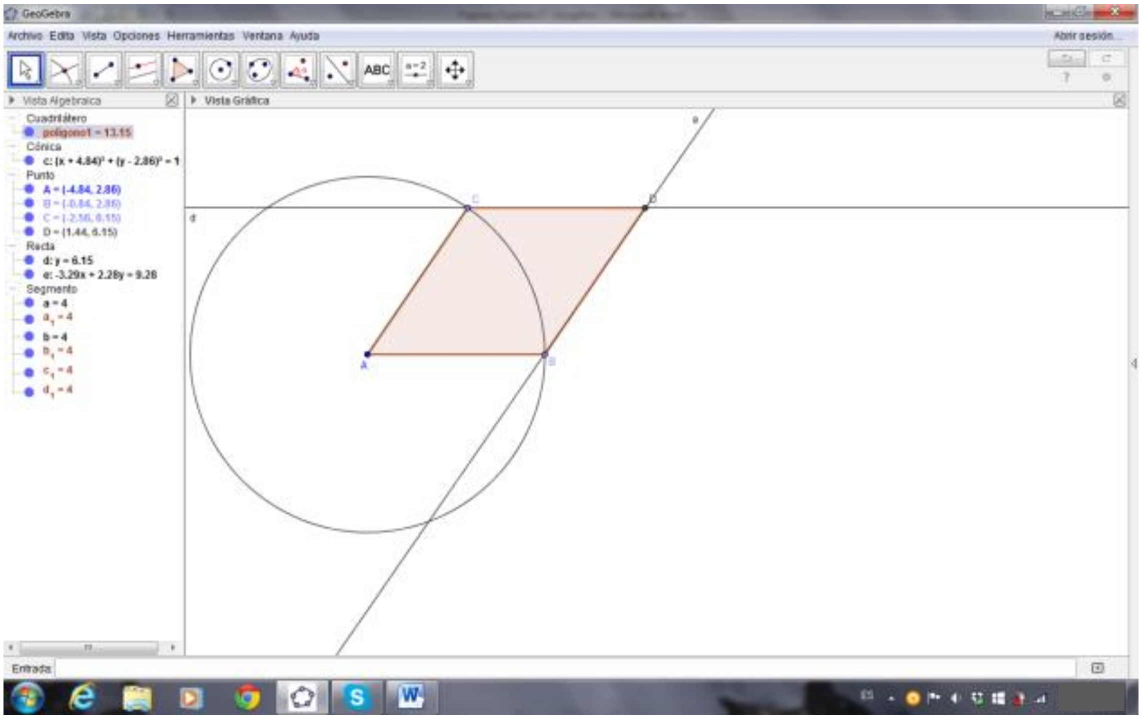


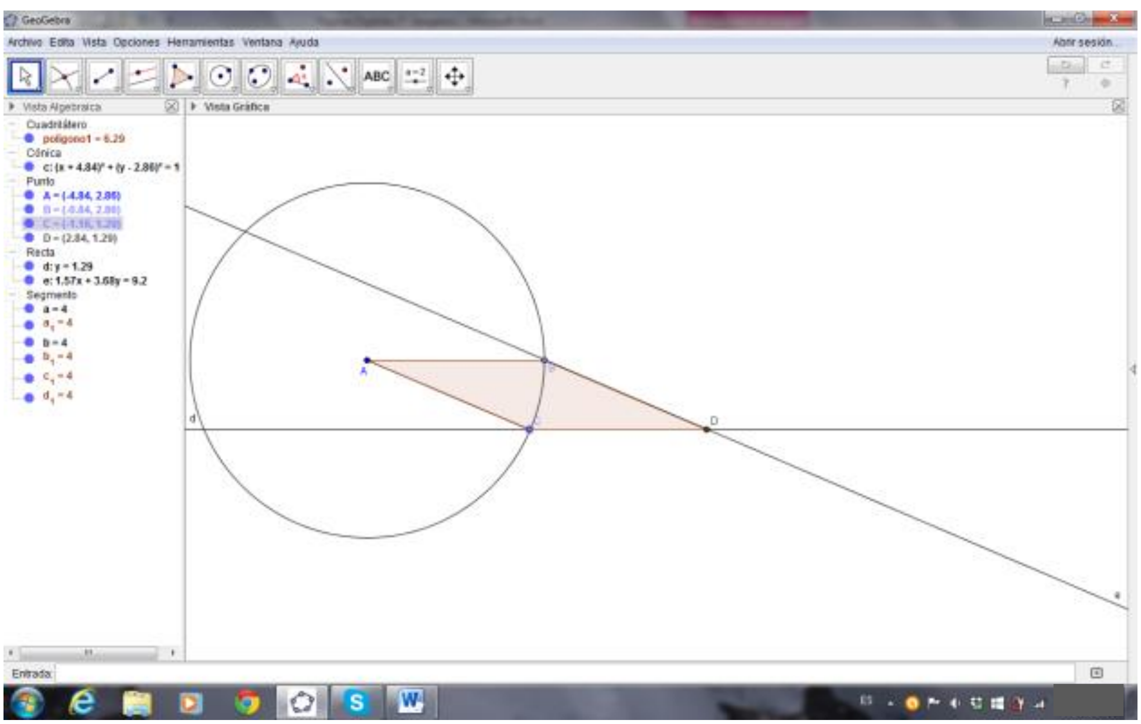
En este caso, al mover algunos vértices, la figura se "deforma". Se podrá entonces discutir con los alumnos los motivos de este fenómeno, intentando arribar a la conclusión de que algunos de los vértices no ha quedado "enganchado".

Otra opción es realizar la construcción recurriendo a *Circunferencia con centro y radio*, cuyo radio sea el segmento dado o su medida. Otro radio cualquiera podrá funcionar como segundo lado, garantizando de esta manera la igualdad entre ambos lados:

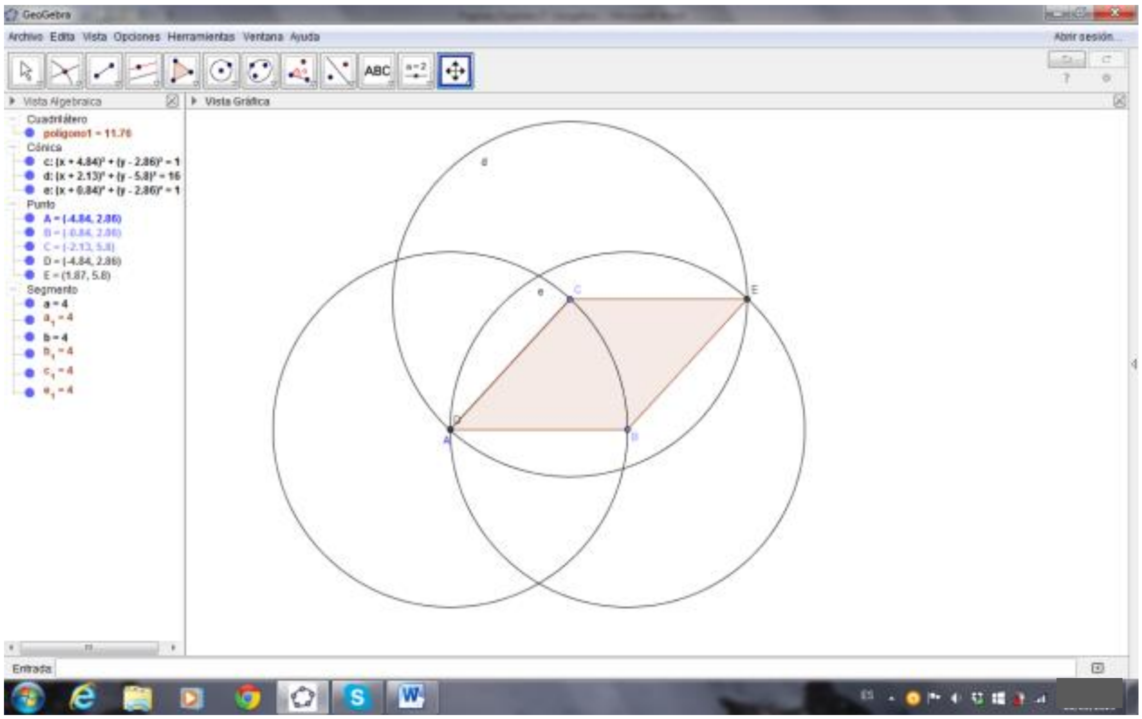


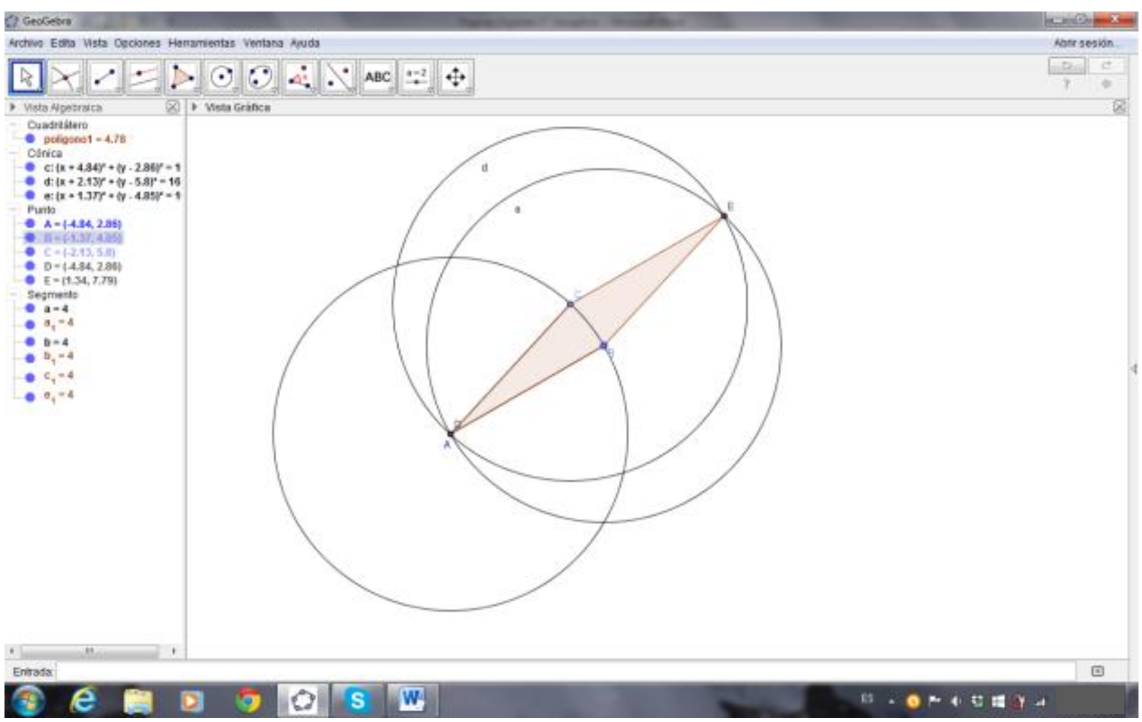
Resta construir los dos lados que faltan. Para ello, se presentan diferentes alternativas. Una posibilidad es recurrir al paralelismo y trazar rectas paralelas a los lados ya dibujados. Esta propiedad del rombo no es evidente y podrá ser analizada con los alumnos a raíz de esta construcción, de manera intuitiva, considerando que si se traslada cada lado de manera paralela hasta que pase por el otro vértice, se preservan sus longitudes, es decir que los cuatro lados siguen siendo iguales. A su vez, al mover algunos de los vértices, se podrá analizar que se modifica la amplitud del ángulo pero no la longitud de los lados, ya que han sido fijados desde el inicio:





Otra posibilidad de construcción se apoya en el uso de nuevas circunferencias para preservar la longitud de los cuatro lados. Es decir, en lugar de trasladar los lados ya construidos, hacer centro en los extremos de los segmentos y dibujar circunferencias iguales a la ya trazada. De esta manera se logra obtener el vértice que falta. Y al mover cualquiera de los elementos, se modifica el dibujo pero se preserva la igualdad entre los cuatro lados, característica del rombo:





Este problema se podrá retomar al tratar con los alumnos la actividad 2. a) de la página 101, que propone dibujar un rombo que tenga lados de 4 cm. El dato de la longitud del lado pareciera modificar el problema, pero, en ambos casos, se trata de concluir que si se conoce la longitud del lado de un rombo, es posible construir infinitos, ya que puede variar el ángulo entre lados consecutivos y, en definitiva, el rombo que se obtiene. El movimiento que permite efectuar el programa GeoGebra puede colaborar en atrapar esta idea.

En este apartado hemos intentado explicitar algunas ideas acerca del trabajo que habilita el programa GeoGebra, el sentido que se le podría otorgar a algunos de los problemas que se proponen en el libro y ciertas dificultades que podrían surgir en el aula a raíz del trabajo que desplieguen los alumnos. A su vez, queremos destacar la necesidad de considerar que el trabajo con lápiz y papel, si bien puede resultar un insumo para comenzar a trabajar con este programa, no se relaciona de manera directa con algunas de las condiciones que comandan el uso de este *software*. Sabemos también que puede resultar un trabajo novedoso para los niños –y los docentes– con todos los recaudos, temores y dudas que este puede generar. Esperamos que estas líneas, aunque breves, ayuden al docente a explorar el trabajo en el aula con esta nueva herramienta.

V. Bibliografía para el docente

- **Broitman, C.; Itzcovich, H.** (2003). "Geometría en los primeros grados de la escuela primaria: problemas de su enseñanza, problemas para su enseñanza". En Panizza, M. (comp.) *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y primer ciclo de EGB: Análisis y Propuestas*. Buenos Aires. Paidós.
- **Broitman, C.; Itzcovich, H.** (2008). "La Geometría como un medio para 'entrar en la racionalidad'. Una secuencia para la enseñanza de los triángulos en la escuela primaria". En: *Revista 12ntes. Enseñar Matemática Nº 4.* Buenos Aires.
- **Dirección General de Educación Básica. Pcia. de Buenos Aires.** (2001). Orientaciones didácticas para la enseñanza de la Geometría en EGB. Disponible en *www.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/default.cfm.*
- **Gálvez, G.** (1994). "La Geometría, la psicogénesis de las nociones espaciales y la enseñanza de la Geometría en la escuela elemental". En: Parra, C. y Saiz, I. (comp.). *Didáctica de la Matemática, aportes y Reflexiones*. Buenos Aires. Paidós.
- **Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula** (1998). La enseñanza de la Geometría en el segundo ciclo. Documento de actualización curricular N.° 5. Matemática. Disponible en *www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/docum/matematica.php.*
- **Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula** (2007). Matemática. Geometría. Aportes para la enseñanza. Disponible en *www.estatico.buenos aires.gov.ar/areas/educacion/curricula/media/matematica/geometria_media.pdf.*
- **Itzcovich, H.** (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría.* Buenos Aires. Libros del Zorzal.

- **Itzcovich, H.** (coord.) (2008). "Acerca de la enseñanza de la Geometría". En: *La Matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula*. Bs. As. Aique.
- **Martínez, R. y Porras, M.** (1998). "La Geometría del Plano en la Escolaridad Obligatoria". En: *Revista Novedades Educativas Nº 78*. Buenos Aires.
- **MECyT** (2006). Aportes para el seguimiento del aprendizaje en procesos de enseñanza. 4.°, 5.° y 6.° años. Educación Primaria.
- **Ponce, H:** (2003): *Enseñar Geometría en el primer y segundo ciclo*. Diálogos de la capacitación. CePA. Ministerio de Educación. G.C.B.A. Disponible en *www.generacionba.gov.ar/areas/educacion/cepa/publicaciones.php?menu_id=20823.*